ALGORITMO DUAL-SIMPLEX

Es claro que para cualquier problema de programación lineal los z_j-c_j son completamente independientes del vector de limitaciones b_i. Consecuentemente, el conjunto de soluciones básicas a Ax = b con z_j-$c_j \geq 0$ para toda j, depende únicamente de las a_j y de las c_j , pero no de b (para un problema de Maximización). En general, no toda solución básica factible con todas las z_j-$c_j \geq 0$ será optima.

La observación realizada presenta una interesante posibilidad. Si se pudiera iniciar con alguna solución básica, pero no factible a un problema dado de programación lineal que tenga todos los zj-cj ≥0, entonces considerando que ninguna base debe ser repetida, una solución optima a el problema de programación lineal será obtenida en un numero finito de pasos. Esto es lo que precisamente el algoritmo Dual-Simplex hace.

El hecho de que se mantienen todos los zj-cj ≥0 en cada paso y que no importa la factibilidad de las soluciones básicas (del vector de limitaciones b_i) sugiere que la Teoría de Dualidad debe ayudar en el desarrollo de tal algoritmo.

Debido a que no siempre es fácil iniciar utilizando este algoritmo ya que no tiene la aplicabilidad general que tiene el usual método Simplex. Sin embargo, este puede ser usado en ciertos casos para eliminar la necesidad de utilizar la fase I y la consecuente introducción de las variables artificiales.

Este algoritmo debido a **Lemke,** ha sido llamado Dual-Simplex debido a que los criterios seguidos para introducir y sacar el vector son aquellos seguidos para el problema Dual en lugar de los del problema primo.

Procedimiento :

1).- El primer vector que debe dejar la base, está determinado por :

$$X_{Br} = \min X_{Bi} \text{ , para } X_{Bi} < 0$$

2).- El vector que entra en la base está determinado por :

Para un problema de Minimización

$$\theta = \frac{z_k - c_k}{y_{rk}} = \min_j \left\{ \frac{z_j - c_j}{y_{rj}} \text{ , } y_{rj} < 0 \right\}$$

Para un problema de Maximización

$$\theta = \frac{z_k - c_k}{y_{rk}} = \max_j \left\{ \frac{z_j - c_j}{y_{rj}} \text{ , } y_{rj} < 0 \right\}$$

Ejemplo :

Max $\mathbf{Z = -3x_1 - x_2}$
sujeto a :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 \quad\quad &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 \quad\quad - x_4 &= 2 \end{aligned}$$

En lugar de introducir variables artificiales que son necesarias para aplicar el Método Simplex, se considera la base que contiene a x_3 y x_4 que es :

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

para esta base $x_B = (-1, -2)$

en forma tabular :

			C_J	-3	-1	0	0	
C_B	X_B	b		X_1	X_2	X_3	X_4	
0	X_3	-1		-1	-1	1	0	
0	X_4	-2		-2	-3	0	1	
				0	0	0	0	Z_J
	Z=	0		3	1	0	0	Z_J-C_J

Se selecciona la X_{Bi} mas negativa como la variable que deja la base :

X_{Bi} = min (-2, -1), por lo que sale $X_{B2} = X_4 = -2$

La variable que entra a la base es seleccionada :

$$\theta = \frac{z_k - c_k}{y_{rk}} = \max_j \left\{ \frac{z_1 - c_1}{y_{r1}}, \frac{z_2 - c_2}{y_{r2}} \right\} = \max \{ -3/2 , -1/3 \}$$

θ = -1/3, entonces entra a_2 a la base.

en forma tabular :

			C_J	-3	-1	0	0	
C_B	X_B	b		X_1	X_2	X_3	X_4	
0	X_3	-1/3		-1/3	0	1	-1/3	
-1	X_2	2/3		2/3	1	0	-1/3	
				-2/3	-1	0	1/3	Z_J
	Z=	-2/3		7/3	0	0	1/3	Z_J-C_J

La siguiente variable a salir es :

$$\mathbf{X_{B1} = X_3 = -1/3}$$

La variable a entrar en solución se selecciona :

$$\theta = \frac{z_k - c_k}{y_{rk}} = \max_{j} \left\{ \frac{z_1 - c_1}{y_{r1}}, \frac{z_4 - c_4}{y_{r4}} \right\} = \max \left\{ \frac{7/3}{-1/3}, \frac{1/3}{-1/3} \right\}$$

θ = max (-7, -1) = -1, entonces entra a_4 en solución.

en forma tabular :

			C_J	**-3**	**-1**	**0**	**0**	
C_B	**X_B**	**b**		**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	
0	X_4	1		1	0	-3	1	
-1	X_2	1		1	1	-1	0	
				-1	-1	1	0	**Z_J**
	Z=	-1		2	0	1	0	**Z_J-C_J**

Todas las X_{Bi} son ahora > 0 y el criterio de optimalidad está satisfecho.

Note que el valor de Z no se incrementó en cada iteración. En caso contrario se redujo en cada paso. No existe razón por la cual Z deba incrementarse ya que las soluciones básicas no eran factibles hasta que la solución fue alcanzada. En efecto Z debe decrecer o permanecer sin cambios en cada iteración, ya que usando el método Simplex siempre se tiene que $\hat{Z} = Z$ y Z es siempre minimizada en el problema dual.