

Investigación de Operaciones

INTRODUCCIÓN A LA INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES (I de O)

Actualmente la administración está funcionando en un ambiente de negocios que está sometido a muchos más cambios, los ciclos de vida de los productos se hacen más cortos, además de la nueva tecnología y la internacionalización creciente.

INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES (I de O)

Las raíces de la investigación de operaciones se remonta a cuando se hicieron los primeros intentos para emplear el método científico en la administración de una empresa. Sin embargo, el inicio de esta disciplina se atribuye a los servicios militares prestados a principios de la segunda guerra mundial.

Introducción

Las actividades de la I.O. se iniciaron durante la segunda guerra mundial. La real fuerza aérea de Inglaterra busco ayuda de los científicos ingleses para resolver problemas de táctica, resultado de los ataques mas recientes de los alemanes.

Al terminar la guerra, el éxito de los científicos alemanes de la Gran Bretaña, atrajo la atención de las fuerzas armadas de los Estados Unidos, quiénes decidieron también establecer un grupo semejante de científicos con el propósito de investigar, analizar y resolver problemas militares.

Eventualmente, la I.O. fue adoptada en el sector privado, y especialmente en la industria, ha alcanzado un nivel elevado de éxito. Además La I.O. es una disciplina bien establecida en las universidades del mundo. Tiene aplicación como ciencia en la toma de decisiones del mundo. Tiene aplicación en la toma de decisiones y sigue creciendo en la industria, los negocios, las finanzas, los hospitales y las bibliotecas.

NATURALEZA DE LA INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

La investigación de operaciones se aplica a problemas que se refieren a la conducción y coordinación de operaciones (o actividades) dentro de una organización.

La investigación de operaciones intenta encontrar una *mejor* solución, (llamada *solución óptima*) para el problema bajo consideración.

Así, la IO es una ciencia para la representación de problemas reales mediante modelos matemáticos que junto con métodos cuantitativos nos permiten obtener una solución numérica a los mismos

Que puede entenderse por IO? Varios autores han dado distintas definiciones sobre la materia: También se habla de Administración Científica [MS : Management Science]

• ***Definición 1*** Estudia la forma de mejorar el funcionamiento y los resultados de procesos complejos donde intervienen hombres y maquinas.

• ***Definición 2*** El estudio de los sistemas administrativos según el mismo esquema científico con el cual los sistemas físicos, químicos y biológicos son estudiados en las ciencias naturales.

• ***Definición 3*** El arte de ganar guerras sin una pelea real (Arthur Clarke , tributo a los éxitos en la 2da. Guerra Mundial) Esta definición no aporta mucho a los gerentes de hoy.

• **Definición 4** IO es la aplicación de métodos científicos, técnicas y herramientas a problemas que involucran la operación de un sistema a fin de dar a los encargados de la operación óptimas soluciones a los problemas (Churchman, Ackoff)

• **Definición 5** El conjunto de métodos de análisis científico de los fenómenos de organización (A. Kaufmann) [incluyen relaciones activas entre hombres, productos y máquinas]

• **Definición 6** IO se interesa en la toma de decisiones óptimas en sistemas determinísticos y probabilísticos que se originan en el mundo real y en la modelación de los mismos

Fases de Estudio de la I.O.

- Identificación y definición del problema
- Formulación del problema como un modelo matemático
- Solución del modelo
- Colección de datos
- Desarrollo del enfoque de computación
- Validación del modelo
- Implantación de la solución.

METODOLOGÍA DE LA I de O

1. Definición del problema

Esto incluye determinar los objetivos apropiados, las restricciones sobre lo que se puede hacer, las interrelaciones del área bajo estudio con otras áreas de la organización, los diferentes cursos de acción posibles, los límites de tiempo para tomar una decisión, etc. ***Este proceso de definir el problema es crucial ya que afectará en forma significativa la relevancia de las conclusiones del estudio.***

2. Formulación de un modelo matemático

La forma convencional en que la investigación de operaciones realiza esto es construyendo un modelo matemático que represente la esencia del problema.

Un modelo siempre debe ser menos complejo que el problema real, es una aproximación abstracta de la realidad con consideraciones y simplificaciones que hacen más manejable el problema y permiten evaluar eficientemente las alternativas de solución.

3. Obtención de una solución a partir del modelo.

Resolver un modelo consiste en encontrar los valores de las variables dependientes, asociadas a las componentes controlables del sistema con el propósito de optimizar, si es posible, o cuando menos mejorar la eficiencia o la efectividad del sistema dentro del marco de referencia que fijan los objetivos y las restricciones del problema.

La selección del método de solución depende de las características del modelo. Los procedimientos de solución pueden ser clasificados en tres tipos: **a) analíticos, que utilizan procesos de deducción matemática**; **b) numéricos, que son de carácter inductivo y funcionan en base a operaciones de prueba y error**; **c) simulación, que utiliza métodos que imitan o, emulan al sistema real, en base a un modelo.**

4. Prueba del modelo

Antes de usar el modelo debe probarse exhaustivamente para intentar identificar y corregir todas las fallas que se puedan presentar

5. Validación del modelo

Es importante que todas las expresiones matemáticas sean *consistentes en las dimensiones* de las unidades que emplean. Además, puede obtenerse un mejor conocimiento de la validez del modelo variando los valores de los parámetros de entrada y/o de las variables de decisión, y comprobando que los resultados de moelo se comporten de una manera factible.

6. Establecimiento de controles sobre la solución

Esta fase consiste en determinar los rangos de variación de los parámetros dentro de los cuales no cambia la solución del problema.

Es necesario generar información adicional sobre el comportamiento de la solución debido a cambios en los parámetros del modelo. Usualmente esto se conoce como ***ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD.***

7. Implantación de la solución

El paso final se inicia con el proceso de "vender" los hallazgos que se hicieron a lo largo del proceso a los ejecutivos o tomadores de decisiones.

En la práctica estas fases pueden ser interrelacionadas y estas se pueden clasificar bajo tres mayores áreas.

Aplicación: Incluye las fases de identificar y definir el problema, formulación del modelo, colección de los datos, validación del modelo e implementación de la solución.

•**Teoría:** Provee los fundamentos matemáticos que marcan el desarrollo de los métodos o algoritmos para resolver el modelo

•**Computación:** Consiste en determinar las estrategias para conseguir la solución numérica con eficiencia y rapidez

Técnicas y Métodos de la IO

Para Optimizar:

- Programación Lineal
- Programación No Lineal
- Programación Dinámica
- Programación Entera
- Programación por metas
- Teoría de Redes
- Secuenciación
- Transporte y Asignación
- Pronósticos

Técnicas y Métodos

Para Analizar:

- Teoría de Colas
- Simulación
- Cadenas de Markov
- Teoría de Juegos
- Teoría de Decisión
- PERT

INVESTIGACION DE OPERACIONES

FUNCION OBJETIVO

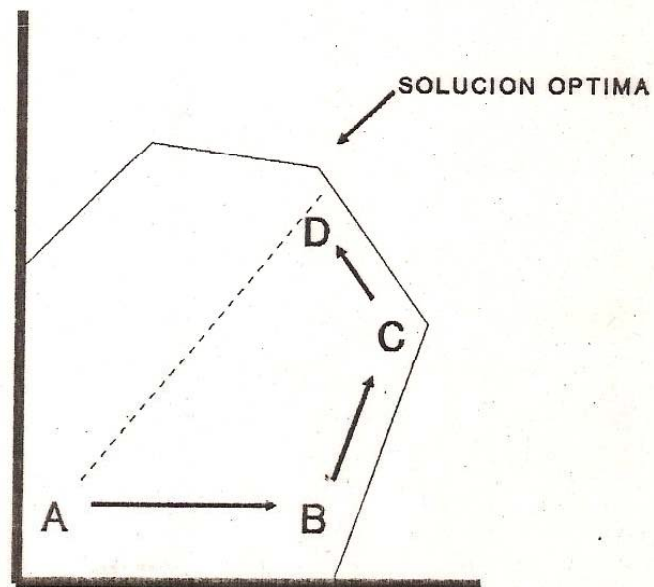
MAXIMIZAR o MINIMIZAR $f(x_1, x_2, \dots, x_j)$

SUJETO A ;

$g_i(x_1, x_2, \dots, x_j)$

$x_j \geq 0$, $j=1,2,\dots,N$ (No. DE VARIABLES)

$i=1,2,\dots,M$ (No. DE ECUACIONES)



CALCULOS ITERATIVOS DE LA I.O.

Aplicaciones Específicas

- Determinación del tamaño y localización de planta
- Programación de operaciones
- Operación de máquinas
- Pronósticos
- Control de inventarios
- Desarrollo de productos
- Mercadotecnia

- Planeación, programación y control de procesos
- Rutas de distribución de productos y materiales
- Simulación de sistemas discretos
- Estudio de líneas de espera
- Mezcla óptima de productos
- Programas de distribución de recursos

Aplicaciones en otras áreas sin fines lucrativos:

Contaminación

Hospitales

Educación

Control de tránsito de caminos

Investigación de crímenes

PROCESOS Y PROBLEMAS COMUNES EN LA IO

1 - Procesos de formación de existencias: Inventarios:

Cuando y cuanto hay que pedir? Compromiso entre costos de adquisición, costos de retraso, costos de escasez, costos de almacenamiento [Formulación de ecuaciones, Programación Lineal, Lineal Entera, Dinámica]

2 - Procesos de asignación de recursos:

1. se deben realizar cierto número de actividades y existen diversas formas alternativas de hacerlo
2. no hay recursos suficientes para hacer las actividades en la forma más eficaz. Luego se combinan las actividades y los recursos para la mejor efectividad total

[Programación matemática, Programación Lineal, Modelos de Transporte, etc]

3 - Procesos de espera: Llegada de entidades (usuarios) a unidades de servicios; costo de espera del usuario o de tiempo ocioso de las unidades. Se trata de controlar las llegadas u organizar los centros de servicio para que sea mínima la suma de costos. Determinación del número de centros de servicio y/o escalonamiento temporal de las llegadas [Teoría de Colas, Simulación]

4 - Procesos de sustitución de equipos: por desgaste o envejecimiento (por el uso o nuevas tecnologías) o este sujeto a fallas o muerte. El problema consiste en escalonar el proceso de sustitución de forma que sea mínima la suma del costo del nuevo equipo, del costo de mantener el rendimiento del equipo viejo y el costo por pérdida del rendimiento. [Modelos de Reemplazo]

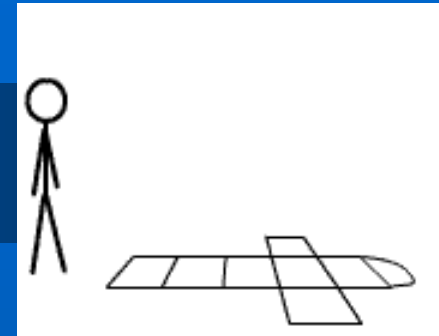
5 - Procesos competitivos es cuando los efectos de una decisión de una de las partes puede verse afectada por la decisión de la otra parte. [Teoría de juegos]

6 - Procesos combinados los sistemas reales raramente afectan a uno solo de los procesos anteriores: un problema de control de producción incluye normalmente cierta combinación de los procesos de almacenamiento, asignación de recursos y espera

LIMITACIONES DE LA I de O

1. Frecuentemente es necesario hacer simplificaciones del problema original para poder manipularlo y tener una solución.
2. La mayoría de los modelos sólo considera un solo objetivo y frecuentemente en las organizaciones se tienen objetivos múltiples.
3. Existe la tendencia a no considerar la totalidad de las restricciones en un problema práctico, debido a que los métodos de enseñanza y entrenamiento dan la aplicación de esta ciencia centralmente se basan en problemas pequeños para razones de índole práctico, por lo que se desarrolla en los alumnos una opinión muy simplista e ingenua sobre la aplicación de estas técnicas a problemas reales.
4. Rara vez se realizan análisis costo-beneficio de la implantación de soluciones definidas por medio de la I de O, en ocasiones los beneficios potenciales se ven superados por los costos ocasionados por el desarrollo e implantación de un modelo.

Dificultades



Dificultades de este tipo de enfoques:

- Identificación del problema (debemos ignorar partes o tratar el problema entero)
- Elección del modelo matemático adecuado así como el algoritmo adecuado para resolverlo (validación del algoritmo)
- Dificultades en la implementación
- Velocidad (costos) que supone llegar a una solución
- Calidad de la solución
- Consistencia de la solución

Dificultades en su aplicación:

- El abismo actual que existe entre la teoría y la práctica
- La falta de cooperación entre el personal responsable de la implementación y el equipo de I.O.
- La falta de entendimiento por parte de la gerencia de lo que se espera de las actividades de la I.O.
- El tiempo que se necesita normalmente para llevar a cabo un estudio de I.O.
- Las dificultades encontradas por el equipo de I.O. en definir el problema y obtener los datos.

Dificultades para implementar la solución:

- Conseguir la aceptación de la gerencia
- Falta de entendimiento en I.O. por parte de la gerencia
- Falta de datos confiables
- Falta de tiempo para analizar un problema real con métodos auténticos de la I.O.
- Falta de entendimiento por parte del personal encargado de la implementación
- Falta de personal bien entrenado
- Dificultades para definir el problema
- Mala fama del equipo de I.O. en resolver problemas prácticos.

Introducción a la Programación lineal

El problema general es asignar *recursos limitados* entre *actividades competitivas* de la mejor manera posible (*óptima*).

Este problema incluye elegir el nivel de ciertas actividades que compiten por recursos escasos necesarios para realizarlas

Programación Lineal (P.L.) consiste en un grupo de métodos matemáticos para optimización en planeación, o control de dinero, maquinaria, tiempo y espacio. El trata con la asignación de recursos limitados con fines parecidos, cada uno de los cuales teniendo ciertos niveles de utilidad. P.L. optimiza a un valor del sistema sujeto a un conjunto de restricciones.

La función objetivo expresa el valor del sistema a las metas.

Las restricciones son limitaciones del método, tales como capacidad, disponibilidad, etc., que limitan el grado al cual la función objetivo puede ser seguida.

Si una organización debe seleccionar una estrategia y sus recursos son limitados en abastecimiento e interrelacionados, entonces P.L. puede ser usada si se puede expresar el objetivo y las restricciones como igualdades o desigualdades matemáticas lineales.

No existe una fórmula algebraica para calcular la solución de un problema de P.L., todos los métodos disponibles son iterativos. Lo que significa que el mismo tipo de operación debe ser repetida hasta que la solución óptima sea obtenida.

MODELO GENERAL DE PL

Los términos clave son *recursos* y *actividades*, en donde m denota el número de distintos tipos de recursos que se pueden usar y n denota el número de actividades bajo consideración.

Z = valor de la medida global de efectividad

x_j = nivel de la actividad j (para $j = 1, 2, \dots, n$)

c_j = incremento en Z que resulta al aumentar una unidad en el nivel de la actividad j

b_i = cantidad de recurso i disponible para asignar a las actividades (para $i = 1, 2, \dots, m$)

a_{ij} = cantidad del recurso i consumido por cada unidad de la actividad j

Estructura de un modelo de PL

1. *Función objetivo.* Consiste en optimizar el objetivo que persigue una situación la cual es una función lineal de las diferentes actividades del problema, la función objetivo se maximiza o minimiza.
2. *Variables de decisión.* Son las incógnitas del problema. La definición de las variables es el punto clave y básicamente consiste en los niveles de todas las actividades que pueden llevarse a cabo en el problema a formular.

Estructura de un Modelo de pl

3. Restricciones Estructurales. Diferentes requisitos que debe cumplir cualquier solución para que pueda llevarse a cabo, dichas restricciones pueden ser de capacidad, mercado, materia prima, calidad, balance de materiales, etc.

4. Condición técnica. Todas las variables deben tomar valores positivos, o en algunos casos puede ser que algunas variables tomen valores negativos.

Modelo general de PL

$$\text{Optimizar } Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\text{Sujeta a: } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad i=1,2,\dots,m$$

$$x_j \geq 0 \quad j=1,2,\dots,n$$

Los problemas de PL responden a cuestiones como las siguientes:

- Impuestas ciertas condiciones de producción, Que cantidad de un producto determinado, entre varios, debe producirse para obtener un beneficio máximo ?
- Impuesto cierto numero de especificaciones a satisfacer (composición química, valores nutricionales, etc.) que composición debe presentar una mezcla, de manera que su costo sea mínimo?
- Conociendo cierto número de condiciones del mercado (productos, proveedores, consumidores) , como pueden ser establecidos los circuitos de distribución apuntando a minimizar el costo total?
- Impuestas las condiciones de trabajo, como repartir los efectivos entre diferentes especialidades o categorías de trabajadores con el fin de minimizar los gastos o maximizar la eficiencia

Las restricciones pueden referirse a :

- Las disponibilidades de materia prima
- Las capacidades de producción y facilidades de transporte
- Las tarifas de transporte por distintos modos
- Las longitudes de recorrido
- Las capacidades y precios de almacenaje
- Los tiempos de aprovisionamiento, de elaboración, de almacenaje y de expedición
- Las especificaciones de calidades químicas, físicas o tecnológicas, como presión de vapor, viscosidad, etc.

PL trata de asignar recursos limitados entre actividades competitivas en la mejor forma posible

Se aplica a la resolución de una clase general de problemas de optimización relativos a la interacción de muchas variables sujetas a ciertas condiciones restrictivas

El éxito del método de PL se explica por el hecho de que el proceso de decisión es el mismo en todos los casos: elegir entre un conjunto de soluciones posibles, aquella que haga optima una cierta función de las variables sujeta a ciertas restricciones.


En términos generales PL se utiliza en la optimización de problemas que cumplan con :

- 1 Existe un **OBJETIVO** a optimizar y puede colocarse en una función lineal.

[Funcional, función objetivo, función económica]


Son beneficios (+), costos (-), cantidades producidas, otros.

Existe un supuesto implícito del objetivo **El beneficio unitario no depende de la cantidad a producir.** Esto se refiere al concepto de linealidad : **cuesta 10 veces más producir 10 artículos que uno**



A veces este concepto no es fácilmente aplicable (costos directos, indirectos, economía de escala) Para manejar este tipo de no linealidad se han desarrollado otras técnicas, cuadrática, no lineal, dinámica ,etc. Todo el conjunto recibe el nombre de programación matemática.

2 El objetivo está sujeto a **RESTRICCIONES** representables por un sistema de ecuaciones o inecuaciones lineales. Las variables que intervienen en el problema están relacionadas en forma lineal.





Son : Limitaciones de las capacidades de servicio

Volúmenes mínimos exigidos en cada producto

Disponibilidad de materia prima

Disponibilidad de dinero

Exigencias de entrega, etc.



En otras palabras se puede decir que IO toma un sistema real efectúa un conjunto de hipótesis y desarrolla acorde un modelo analítico (físico, económico, biológico).

Problema : construir el modelo y que sea manejable, resolver y analizar resultados.

Otras suposiciones a considerar en los problemas de PL:

Proporcionalidad:

las actividades son consideradas independientes unas de otras. De todas las x_i puede ser que x_k sea $\neq 0$ y todas las $x_i = 0$ para toda $i \neq k$.

Este concepto esta relacionado con el de linealidad. Y tanto el objetivo Z, como el uso de cada recurso son proporcionales al nivel de actividad.

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \dots + c_nx_n$$

Aditividad:

no deben existir términos multiplicados entre actividades. La medida total resultante de la efectividad es igual a la suma de las cantidades generadas por cada actividad conducida por si misma.

Cada variable debe ser aditiva respecto a las utilidades o costos y a la cantidad de recursos usados.

$$\begin{array}{ll} Z = 100 x_1 + 200 x_2 & \text{SI} \\ Z = 100 x_1 + 200 x_2 - 50 x_1 x_2 & \text{NO} \end{array}$$

Divisibilidad:

PL trata variables continuas y aunque muchas veces los problemas requieren que los valores resultantes sean enteros, se permite obtener valores fraccionarios en la solución

Formulación matemática básica en un problema de I.O.

Ejemplo 1: Dos empresas Mineras extraen dos tipos diferentes de minerales, los cuales son sometidos a un proceso de trituración, con tres grados: alto, medio y bajo. Las compañías han firmado un contrato para proveer de mineral a una planta de fundición, cada semana, 12 toneladas de mineral de grado alto, 8 toneladas de grado medio y 24 toneladas de grado bajo. Cada una de las empresas tiene diferentes procesos de fabricación.

Mina	Costo por día (miles de Euros)	Producción(toneladas/día)		
		Alto	Medio	Bajo
X	180	6	3	4
Y	160	1	1	6

¿Cuántos días a la semana debería operar cada empresa para cumplir el contrato con la planta de fundición?

Formulación matemática básica en un problema de I.O.

Debemos buscar una solución que minimice el costo de producción de las empresas, sujeta a las restricciones impuestas por el proceso productivo así como el contrato con la planta de fundición.



Traducción del problema en términos matemáticos

1. definir las variables
2. las restricciones
3. el objetivo

Formulación matemática básica en un problema de I.O.

Variables

Representan las decisiones que puede tomar la empresa:

D_x = número de días a la semana que la empresa X produce

D_y = número de días a la semana que la empresa Y produce

Notar que $D_x \geq 0$ y $D_y \geq 0$

Objetivo

Como objetivo buscamos minimizar el costo

Restricciones

Se recomienda primero plantear las restricciones con palabras antes de pasar a su formulación matemática

Restricción 1. refleja el balance entre las limitaciones productivas de la fábrica y el contrato con la planta de fundición

Grado

Alto $6D_x + 1D_y \geq 12$

Medio $3D_x + 1D_y \geq 8$

Bajo $4D_x + 6D_y \geq 24$

Restricción 2. días de trabajo disponibles a la semana

$D_x \leq 5$ y $D_y \leq 5$

Formulación matemática básica en un problema de I.O.

La representación completa del problema tomaría la siguiente forma:

Minimizar $180D_x + 160D_y$

Sujeto a:

$$6D_x + 1D_y \geq 12$$

$$3D_x + 1D_y \geq 8$$

$$4D_x + 6D_y \geq 24$$

$$D_x \leq 5, D_y \leq 5$$

$$D_x \geq 0, D_y \geq 0$$



Ejemplo N°2

En una fábrica de cerveza se producen dos tipos: rubia y negra. Su precio de venta es de \$15 pesos/l y \$13 pesos/l, respectivamente. Sus necesidades de mano de obra son de 3 y 5 empleados, y de \$5000 y \$2000 de materias primas por cada 10000 l.

La empresa dispone semanalmente de 15 empleados y \$10000 para materias primas, y desea maximizar su beneficio. ¿Cuántos litros debe producir?



X_i = número de unidades de 10,000 litros de cerveza tipo i a producir

Formulación

$$\text{Max } z = 150000x_1 + 130000x_2$$

Sujeto a :

$$3x_1 + 5x_2 \leq 15$$

$$5000x_1 + 2000x_2 \leq 10000$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Problema del transporte

- Distribuir un bien desde m orígenes a n destinos

- Minimizar el costo

- Min $z = \sum \sum c_{ij} \cdot x_{ij}$

- s.a. $\sum x_{ij} \leq s_i$

- $\sum x_{ij} \geq d_j$

- $x_{ij} \geq 0$

Oferta total: $O_T = \sum s_i$

Demanda total: $D_T = \sum d_j$

Problema balanceado:

Ejemplo Transporte

Hortalizas enlatadas es uno de los productos más importantes de la compañía T & T. Los hortalizas se preparan en tres enlatadoras (cercanas a Tepic, Nayarit; a Monterrey, Nuevo León y a Jalapa, Veracruz) y después se mandan por camión a cuatro almacenes de distribución (en Guadalajara, Jalisco, León, Guanajuato; Puebla, Puebla, Culiacán, Sinaloa) en México. Puesto que los costos de embarque constituyen un gasto importante, la gerencia ha iniciado un estudio para reducirlos lo más posible que se pueda. Se ha hecho una estimación de la producción de cada enlatadora para la próxima temporada y se ha asignado a cada almacén una cierta cantidad de la producción total de hortalizas. En la siguiente tabla se proporciona esta información (en unidades de carga de camión), junto con el costo de transporte por camión cargado para cada combinación de enlatadora-almacén. Como se ve hay un total de 300 cargas de camión que se deben transportar. El problema es determinar el plan de asignación de estos embarques a las distintas combinaciones de enlatadora-almacén que *minimice el costo total de transporte.*

Costo de embarque (\$) por carga

	Almacén				Producción
	1	2	3	4	
1	464	513	654	867	75
Enlatadora					
2	352	416	690	791	125
3	995	682	388	685	100
Asignación	80	65	70	85	

Problema de asignación

Minimizar el costo total de operación de modo que:

- cada tarea se asigne a una y sólo una máquina
- cada máquina realice una y sólo una tarea

$$\text{Min} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

s.a.

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1, j = 1..n$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, i = 1..m$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}$$

x_{ij} : 1 si la tarea i se hace con la máquina j
 c_{ij} : costo de realizar la tarea i con máquina j

n tareas

m máquinas

Si hay más máquinas que tareas se formula con desigualdades, y se resuelve con tareas ficticias