PROGRAMACION ENTERA

En muchos problemas prácticos, las variables de decisión son realistas únicamente si estas son enteras. Hombres, máquinas y vehículos deben ser asignados a tareas en cantidades enteras. Hay muchos recursos que deben existir en forma indivisible donde las asignaciones en fracciones son insignificantes. La programación entera obtiene soluciones a problemas de asignación que requieren enteros. Cuando cada variable debe ser un entero, es llamada programación entera pura; cuando únicamente algunas variables, deben ser enteras, es llamada programación entera mixta.

Un enfoque para obtener soluciones enteras a un problema es resolver de la solución óptima obtenida de la solución del Simplex y redondear las soluciones a números enteros. Aunque el enfoque de redondeo es en ocasiones adecuado, esto tiene errores y puede conducir a una solución subóptima. La solución óptima no-entera no es necesariamente factible u óptima después de que esta es redondeada. Cuando las variables son grandes y sus valores es la función objetivo son pequeñas, un simple redondeo es apropiado. En problemas que involucran pequeñas magnitudes para las variables y grandes valores en la función objetivo, una solución entera óptima es necesaria.

La programación entera esta relacionada con funciones discretas y no distingue entre números mixtos y enteros. Problemas de Programación Lineal generalmente requieren que las variables sean enteras no-negativas. Si la mejor solución factible a un problema de Programación Lineal es una solución entera, esta es también la mejor solución factible a un problema de Programación Entera.

La programación Entera es una forma de programación no-Lineal. Es casi lo mismo que Programación Lineal con la excepción de que las variables en la solución final deben ser números enteros no-negativos. Los problemas de programación entera pueden ser resueltos transformando el problema en una forma que permita la aplicación del método Simplex de Programación Lineal.

Un método para resolver problemas de Programación Lineal Entera Mixta y Pura es el procedimiento del **Plano Cortante de Gomory**. Este procedimiento que produce la mejor solución cuando las variables deben ser expresadas en números enteros; inicia resolviendo el problema por el método Simplex sin considerar el requerimiento de enteros. Después de que la solución óptima no entera es obtenida a través del Simplex, una nueva restricción Lineal es desarrollada para satisfacer los requerimientos de enteros.

La nueva restricción Lineal, llamada **Plano Cortante** modifica el problema original eliminado algunas soluciones no enteras, pero no elimina las soluciones factibles enteras. La nueva restricción corta o divide la solución óptima no entera previa y la considera no factible.

La nueva ecuación restrictiva es añadida a la tabla del Simplex y una nueva variable entra en solución. Cuando la nueva variable entra en solución, causa que al menos una de las variables básicas tome un valor entero. El proceso continua hasta que todas las variables básicas sean enteras. A través de esta técnica iterativa se alcanza una solución óptima entera después de que han sido añadidas las suficientes nuevas restricciones para recortar todas las soluciones superiores no enteras . Este método resulta incómodo, pero garantiza una solución óptima no-negativa entera. Observe el algoritmo del plano cortante.

Una operación clave en el algoritmo implica la selección de una nueva ecuación restrictiva la cual es también llamada Plano Cortante. Una nueva regla es elegir la variable básica que tenga la mayor fracción en la solución óptima no-entera. **Si dos o más variables básicas están empatadas en su parte fraccional, seleccione aquella variable que su coeficiente en la función objetivo tenga la menor contribución por unidad (para un problema de minimización seleccione las variables básicas cuyo coeficiente en la función objetivo que tenga el menor costo)**. Para empates en las fracciones, la variable con la menor contribución por unidad es elegida debido a que esta variable se convertirá en un entero en la próxima iteración. Debido a que el valor de Z no puede aumentar y puede decrecer (prob. de maximización) al hacer la variable entera, la variable básica con la menor contribución reducirá el valor de Z en una cantidad muy pequeña. Para generar la nueva restricción, reemplace todos los coeficientes en la ecuación restrictiva en cuestión por los menores números no-negativos que son congruentes a esos coeficientes y la expresión resultantes debe ser mayor que o igual a la parte fraccional de la constante en el lado derecho del signo igual.

ALGORITMO DEL PLANO CORTANTE PARA PROGRAMACION ENTERA

Paso 1 OBTENGA LA SOLUCION OPTIMA USANDO EL METODO SIMPLEX

Paso 2 ¿SI SON TODA LAS VARIABLES BASICAS ENTERAS? Pase al último paso

Paso 3 SELECCIONE LA RESTRICCION CON LA MAYOR PARTE FRACCIONAL EN SU SOLUCION

Paso 4 REEMPLACE TODOS LOS COEFICIENTES EN LA RESTRICION POR EL NUMERO MENOR NO-NEGATIVO CONGRUENTE A LOS COEFICIENTES Y ESTABLEZCA ≥ LA PARTE FRACCIONAL CONSTANTE

Paso 5 RESTE UNA VARIABLE DE HOLGURA Y AÑADA LA NUEVA RESTRICCION A LA TABLA PREVIA

Paso 6 APLICANDO EL DUAL-SIMPLEX. SELECCIONE EL MENOR VALOR ABSOLUTO DEL ELEMENTO Z_j-C_j ENTRE SU RESPECTIVO ELEMENTO (NEGATIVO) DE LA NUEVA RESTRICCIÓN DE LA TABLA PREVIA COMO LA VARIABLE QUE ENTRA EN LA PROXIMA TABLA

$$\underset{\text{No Básica}}{Min}\left\{\left|\frac{z_j - c_j}{y_{rj}}\right|, y_{rj} < 0\right\}$$

Paso 7 OBTENGA LA PROXIMA TABLA UTILIZANDO EL METODO SIMPLEX

Paso 8 SI SON TODAS LAS VARIABLES BASICAS ENTERAS, vaya al último paso, caso contrario, vaya al paso 3

Paso 9 SE HA OBTENIDO LA SOLUCION OPTIMA ENTERA

Normalmente, una variable de holgura negativa va acompañada por una variable artificial positiva. En este punto, la nueva tabla tiene una variable de holgura adicional y una nueva restricción. Se procede a utilizar el método Dual-Simplex para determinar la variable que entra en la solución. El proceso restante prosigue de acuerdo al método Simplex y al algoritmo dado previamente.

Dos números son congruentes si su diferencia es un entero (cero se considera como un entero), por ejemplo 3 2/3 es congruente a 2/3 debido a que cuando se restan resulta el entero 3; -1¾ es congruente a ¼ debido a que cuando se restan resultados enteros -2; y 2/5 es congruente a 2/5 debido a que su resta resulta cero.

Suponga que un problema resuelto por el método Simplex tiene la variable X_1 la cual no es un entero. La ecuación restrictiva de la tabla óptima es como sigue:

$$X_1 + 0X_2 + 0X_3 + 1\ 3/4X_4 - 2\ 2/3X_5 = 8\ 1/3$$

La ecuación restrictiva puede escribirse como

$$(1+0)X_1 + (1+3/4)X_4 + (-3+1/3)X_5 = 8\ 1/3$$

o

$$3/4X_4 + 1/3X_5 = 1/3 + (8 - X_1 - X_4 + 3X_5) \text{ por lo que } 3/4X_4 + 1/3X_5 \geq 1/3$$

Si se asume que todas las variables tienen valores óptimos no- negativos-enteros; la cantidad del lado izquierdo de la igualdad es positivo. La cantidad del lado derecho de la igualdad es positiva y la subcantidad dentro del paréntesis es un entero que debe ser positivo o cero. La cantidad dentro del paréntesis no puede ser negativa debido a que su valor entero cuanto se adiciona a 1/3 resultaría en un valor negativo el cual violaría el lado izquierdo de la igualdad.

Bajo estas circunstancias el valor mínimo posible de lado izquierdo de la ecuación es de 1/3. La nueva restricción que se añade a la tabla es:

$$3/4X_4 + 1/3X_5 \geq 1/3$$

La cual convirtiendo la en igualdad nos queda:

$$3/4X_4 + 1/3X_5 - S_1 = 1/3$$

Ejemplo

Encuentre la solución óptima entera para el siguiente problema

Maximizar $Z = 20A + 40B + 30C$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} 3A + 4B + 2C &\leq 60 \\ 2A + B + 2C &\leq 40 \\ A + 3B + 2C &\leq 0 \\ A, B, C &\geq 0 \end{aligned}$$

Resolviendo el problema utilizando el método Simplex se obtiene la siguiente tabla óptima con A = 0, B = 6 2/3 y C =16 2/3

C_j			20	40	30	0	0	0
CB	XB	b	A	B	C	S1	S2	S3
40	B	6 2/3	1/3	1	0	1/3	-1/3	0
30	C	16 2/3	5/6	0	1	-1/6	2/3	0
0	S3	26 2/3	-1 2/3	0	0	-2/3	-1/3	1
Z_j			381/3	40	30	8 1/3	6 2/3	0
Z_j-C_j			18 2/3	0	0	8 1/3	6 2/3	0

Z=766 2/3

Ya que todas las variables tienen la misma parte fraccional en su solución 2/3, la variable con la contribución menor es elegida (en C_j). La variable S3 con contribución cero es elegida. La restricción correspondiente a S3 es:

$$-1\ 2/3A + 0\ B + 0C - 2/3S1 - 1/3S2 + S3 = 26\ 2/3$$

Los coeficientes en esta restricciones son reemplazados por sus números menores congruentes y establézcalos iguales o mayores que la parte fraccional de la constante (lado derecho).

La restricción resultante es:

$$1/3A + 1/3S1 + 2/3S2 \geq 2/3 \text{ por lo que}$$

$$1/3A + 1/3S1 + 2/3S2 - S4 = 2/3,$$

multiplicándola por -1 para generar la columna que complete la matriz identidad

$$-1/3A - 1/3S1 - 2/3S2 + S4 = -2/3$$

La nueva restricción es añadida a la tabla previa como sigue:

C_j			20	40	30	0	0	0	0
CB	XB	b	A	B	C	S1	S2	S3	s4
40	B	6 2/3	1/3	1	0	1/3	-1/3	0	0
30	C	16 2/3	5/6	0	1	-1/6	2/3	0	0
0	S3	26 2/3	-1 2/3	0	0	-2/3	-1/3	1	0
Nueva Corte		- 2/3	-1/3	0	0	-1/3	-2/3	0	1

Entra en solución______________________↑

$$\text{Min}\left\{\left|\frac{18\frac{2}{3}}{-\frac{1}{3}}, -, -, \frac{8\frac{1}{3}}{-\frac{1}{3}}, \frac{6\frac{2}{3}}{-\frac{2}{3}}, -\right|\right\} = \text{Min }\{56,-,-,25,10,-\}$$

El mayor valor absoluto en Z_j-C_j en la tabla previa es 6 2/3 que corresponde a la variable S2, así S2 entra a formar parte de la base. Procediendo con el método Simplex actualizando la tabla se obtiene la tabla siguiente:

C_j			20	40	30	0	0	0	0
CB	XB	b	A	B	C	S1	S2	S3	S4
40	B	7	1/2	1	0	1/2	0	0	-1/2
30	C	16	1/2	0	1	-1/2	0	0	1
0	S3	27	-1½	0	0	-1/2	0	1	-1/2
0	S2	1	1/2	0	0	1/2	1	0	-3/2
Z_j			35	40	30	5	0	0	10
Z_j-C_j			15	0	0	5	0	0	10

Z=760

Se ha alcanzado la solución óptima entera ya que A = 0, B =7 y C = 16. Si la tabla no hubiera arrojado valores de las variables básicas como enteros, entonces, hubiera sido necesario determinar la nueva restricción y reiterar el procedimiento. Cuando una solución no-entera es transformada a entera, el valor de Z en la solución óptima frecuentemente se reduce. En muchos casos el valor de la solución óptima Z puede permanecer sin cambio pero nunca será mayor.

Teoría del Plano Cortante de Gomory (Análisis de la parte fraccional)

$X_i=B_i-\sum_{j=1}^{n} \alpha\, w_j$, B_i Enteros

$B_i = [B_i]+f_i$

$\alpha^j_i=[\alpha^j_i]+f_{ij}$

$f_i-\sum_{j=1}^{n} f_{ij}\, w_j= X_i-[B_i]+\sum_{j=1}^{n} [\alpha^j_i]w_j$

$[B_1]=1$ $f_{14}=4/10$ $f_{15}=8/10$

$f_1=8/10$ $[\alpha^4{}_1]=0$ $[\alpha^5{}_1]=-1$

$X_1+4/10X_4-2/10X_5=18/10$ Ec. Original

$8/10-4/10X_4-8/10X_5=18/10$

X_iy W_i deben ser enteros y $[B_i]$ también esto implica que el lado izquierdo también sea entero.
Dado que $f_{ij} \geq 0$ y $w_j \geq 0$ implica que $f_{ij}w_j \geq 0$

así;

$f_i-\sum_{j=1}^{n} f_{ij}w_j \leq f_i$ implica $f_i-\sum_{j=1} f_{ij}W_j< 1$

ya que $f_i<1$

Condición necesaria para que se satisfaga que sea valor entero es;

$f_i-\sum_{i=1}^{n} f_{ij}\, w_j \leq 0$

la última restricción puede ser escrito de la forma

$s_i= \sum f_{ij}\, w_j-f_i$ (corte fraccional)
donde si es una variable de holgura no negativa que por definición es tiene un valor entero.

ya que $s_i= -f_i$, hace el problema no factible ; esto significa que la nueva restricción no esta satisfecha por la solución dada.

El método Dual-Simplex puede ser utilizado para eliminar esta infactibilidad, lo que es equivalente a eliminar (cortar) el espacio solución a la solución entera óptima.

Para determinar la variable que entra en solución.

Maximización

$$\theta = (z_k - c_k) / y_{r\,k} = \max_j \{ (z_j - c_i) / y_{r\,j} , y_{r\,j} < 0 \}$$

Minimización

$$\theta = (z_k - c_k) / y_{r\,k} = \min_j \{ (z_j - c_j) / y_{r\,j} , y_{r\,j} < 0 \}$$

Ejemplo:

Max. $Z= 4x_1+5x_2+x_3$

Sujeto a;

$3x_1 + 2x_2 \leq 10$

$1x_1 + 4x_2 \leq 11$

$3x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 13$

$x_1 , x_2 ,x_3 \geq 0$, enteros

Tabla inicial

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
1	- 4	- 5	- 1	0	0	0	0
0	3	2	0	1	0	0	10
0	1	4	0	0	1	0	11
0	3	3	1	0	0	1	13

Tabla optima

Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
1	0	0	0	2/10	4/10	1	194/10
0	1	0	0	4/10	-2/10	0	18/10
0	0	1	0	-1/10	3/10	0	23/10
0	0	0	1	-9/10	-3/10	1	7/10

1a. Restricción

x_1+4/10 x_4+8/10 x_5 = 1 + 8/10

x_1=1

4/10 x_4+8/10 x_5 ≥8/10

s_1 = 4/10 x_4+8/10 x_5-8/10

s_1 - 4/10 x_4-8/10 x_5 =-8/10

a	[a]	f= a-[a]
1	1	0
4/10	0	4/10
-2/10	-1	+8/10

2da. Restricción

x_2 + 9/10 x_4 + 3/10 x_5 = 2 + 3/10

x_2 =2

+9/10 x_4 + 3/10 x_5 ≥3/10

s_1=+9/10 x_4 +3/10 x_5-3/10

s_1-9/10 x_4-3/10 x_5 =-3/10

a	[a]	f= a-[a]
2	2	0
-1/10	-1	+ 9/10
3/10	0	3/10

3a. Restricción

x_3 + 1/10 x_4 + 7/10 x_5 =7/10

x_3=1

1/10 x_4 + 7/10 x_5 ≥7/10

s_1 =+1/10 x_4+7/10 x_5 -7/10

s_1-1/10 x_4-7/10 x_5 = -7/10

a	[a]	f= a-[a]
1	1	0
-9/10	-1	+1/10
-3/10	-1	+7/10

como f_1 (8/10) > f_2 (3/10) y f_1(8/10) > f_3 (7/10) (f_1 tiene la mayor fracción) se trabaja con la ecuación un 1ª ecuación

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	s_1	b
1	0	0	0	2/10	4/10	1	0	194/10
0	1	0	0	4/10	-2/10	0	0	18/10=1+8/10
0	0	1	0	-1/10	3/10	0	0	23/10=2+3/10
0	0	0	1	-9/10	-3/10	1	0	7/10
0	0	0	0	-4/10	-8/10	0	1	-8/10

Utilizando el Dual-Simplex para determinar la variable que entra en solución:
Max {(z_4-c_4)/y_{44} , (z_5 -c_5)/y_{45} } = Max {(2/10)/(- 4/10) , (4/10)/(- 8/10)} = Max {-1/2 , -1/2} (empate), entra (arbitrariamente) x_4 en solución.

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	s_1	b
1	0	0	0	0	0	1	½	19
0	1	0	0	0	-1	0	1	1
0	0	1	0	0	1/2	0	-1/4	25/10=2+5/10
0	0	0	1	0	3/2	1	-9/4	25/1002+5/10
0	0	0	0	1	2	0	-10/4	2

<u>2da. Ecuación</u>

$x_2 + 1/2\ x_5 + 3/4\ x_1 = 2 + 5/10$

$x_2 = 2$
$s_2 = 1/2\ x_5 + 3/4\ s_1 - 1/2$
$s_2 - 1/2 x_5 - 3/4\ s_1 = -1/2$

a	[a]	f=a -[a]
1/2	0	1/2
-1/4	-1	3/4

3a. Ecuación

$x_3 + 1/2\ x_5 + x_6 + 3/4\ s_1 = 2 + 5/10$
$1/2\ x_5 + 3/4\ s_1 \geq 5/10$
$x_3 + x_6 = 2$
$s_2 = 1/2\ x_5 + 3/4\ s_1 - 1/2$
$s_2 - 1/2\ x_5 - 3/4\ s_1 = -1/2.$

	a	[a]	f =a-[a]
$(1\ ^1/_2)$	3/2	1	1/2
$(-2^1/_4)$	-9/4	-3	3/4

como son iguales sus partes fraccionales, se elige la ecuación que corresponda a la variable básica con la mayor contribución en la función objetivo (la ecuación 2).

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	s_1	S_2	b
1	0	0	0	0	0	1	1/2	0	19
0	1	0	0	0	-1	0	1	0	1
0	0	1	0	0	½	0	-1/4	0	25/10
0	0	0	1	0	3/2	1	-9/4	0	25/10
0	0	0	0	1	2	0	-10/4	0	2
0	0	0	0	0	-1/2	0	-3/4	1	-1/2

Utilizando Dual-Simplex para determinar la variable que entra en solución

Max {(0/-1/2) , (1/2/- 3/4)} = Max {0 , -2/3)} entra x_5 en solución.

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	s_1	s_2	b
1	0	0	0	0	0	1	1/2	1	19
0	1	0	0	0	0	0	5/2	-2	2
0	0	1	0	0	0	0	-1	1	2
0	0	0	1	0	0	1	-18/4	3	1
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	3/2	-2	1

Solución Óptima:
Por

Programación lineal	Programación entera
x_1= 1.8	x_1= 2
x_2= 2.3	x_2= 2
x_3= .7	x_3= 1
	x_4= 0
	x_5= 1
Z^*= 19.4	Z^*=19

Si el sistema de ecuaciones fuera:

$3x_1+ 2x_2 \le 10$
$x_1+ 4x_2 \le 11$
$3x_1+ 3x_2+ x_3 \le 13$
$x_1+ 2x_2 \le 6$ ← Corresponde al 1^er corte
$5x_1+14x_2 \le 38$ ← Corresponde al 2^do corte

y su función objetivo

Max $Z = 4x_1 +5x_2 +x_3$

La solución óptima sería:

$x_1 = 2$
$x_2 = 2$
$x_3 = 1$
$z = 19$

Obtención de las ecuaciones de los cortes

1er Corte

Dado que inicialmente $3x_1+2x_2 \leq 10$ y que $3x_1+2x_2+x_4 = 10$, así $x_4 = 10- 3x_1-2x_2$

Y dado que inicialmente $x_1+4x_2 \leq 11$ y que $x_1+4x_2 + x_5 = 11$, así $x_5 = 11- x_1- 4x_2$

Del primer corte, tenemos;

$s_1-4/10x_4 -8/10x_5 = -8/10$

sustituyendo el valor de x_4 y de x_5 tenemos;

$s_1-4/10 (10-3x_1-2x_2) - 8/10 (11-x_1-4x_2) = -8/10$

$s_1-128/10 +2x_1+4x_2= -8/10$; $s_1+2x_1+4x_2= 12$

Reduciendo, tenemos;

$2x_1+4x_2 \leq 12$

$x_1+2x_2 \leq 6$

2do Corte

Dado que inicialmente $x_1+2x_2 \leq 6$ y que $x_1+2x_2 + s_1 = 6$, así $s_1 = 6- x_1- 2x_2$

Del 2do. Corte tenemos que;

$s_2 -1/2 x_5-3/4 s_1 = -1/2$

Sustituyendo el valor de s_2, tenemos que;

$s_2 -1/2(11-x_1-4x_2) -3/4(6-x_1-2x_2) = -1/2$

$s_2-11/2+1/2 x_1+2x_2-9/2+3/4 x_1+3/2 x_2 = -1/2$

$s_2-10+5/4 x_1+7/2 x_2 = 19/2$

Reduciendo, tenemos;

$5/4 x_1+7/2 x_2 \leq 19/2$

$5/2 x_1+7 x_2 \leq 19$

$5x_1+ 14_2 \leq 38$

Ejemplo:

Max. $Z = 2x_1+ x_2$

Sujeto a;

$x_1 + x_2 \leq 5$

$-x_1 + x_2 \leq 0$

$6x_1 + 2x_2 \leq 21$

$x_1 , x_2 \geq 0$, enteros

Max. $Z = 2x_1+ x_2$

Sujeto a;

$x_1 + x_2 +x_3 \leq 5$

$-x_1 + x_2 + x_4 \leq 0$

$6x_1 + 2x_2 + x_5 \leq 21$

$x_1 , x_2 \geq 0$, enteros

Tabla inicial

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b

1	-2	-1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	5
0	-1	1	0	1	0	0
0	6	2	0	0	1	21

Tabla optima

Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
1	0	0	½	0	1/4	7 3/4
0	0	1	3/2	0	-1/4	21 ¼
0	0	0	-2	1	1/2	½
0	1	0	-1/2	0	1/4	2 3/4

La 3a. Ecuación es la que tiene la mayor parte fraccional en el lado derecho

3a. Restricción

$x_1 + 1/2x_3 + 1/4x_5 = 2\ 3/4$

$x_1 = 2$

$1/2x_3 + 1/4x_5 \geq 3/4$

$s_1 = 1/2\ x_3 + 1/4\ x_5 - 3/4$

a	[a]	f= a-[a]
11/4	2	3/4
-1/2	-1	1/2
1/4	0	1/4

Tenemos el 1er. Corte y se añade la ecuación

$-1/2x_3 - 1/4x_5 + s_1 = -3/4$

Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	b
1	0	0	½	0	1/4	0	7 3/4
0	0	1	3/2	0	-1/4	0	21 ¼
0	0	0	-2	1	1/2	0	½
0	1	0	-1/2	0	1/4	0	2 3/4
0	0	0	-1/2	0	-1/4	1	-3/4

Utilizando el Dual-Simplex para determinar la variable que entra en solución:

Max $\{(z_4-c_4)/y_{44}, (z_5-c_5)/y_{45}\}$ = Max $\{(1/2)/(-1/2), (1/4)/(-1/4)\}$ = Max $\{1, 1\}$ (empate), entra (arbitrariamente) x_3 en solución.

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	b
1	0	0	0	0	0	1	7
0	0	0	1	0	-1/2	-2	1 1/2
0	0	0	0	1	3/2	-4	3 1/2
0	1	0	0	0	1/2	-1	3 1/2
0	0	1	0	0	-1	3	0

Las ecuaciones 1, 2 y 3 tienen la mayor parte fraccional

<u>1da. Ecuación</u>

$x_3 - 1/2x_5 - 2s_1 = 1\ ½$

$x_3 - 2s_1 = 1$

$s_2 = 1/2x_5 + ½$

a	[a]	f=a -[a]
1 1/2	1	1/2
-1/2	-1	1/2

<u>2a. Ecuación</u>

$x_4 + 3/2x_5 - 4s_1 = 3\ ½$

$x_4 - 4s_1 = 3$

$s_2 = 1/2\ x_5 + 1/2$

	a	[a]	f =a-[a]
($3\ ^1/_2$)	1/2	3	1/2
(1 1/2)	1/2	0	1/2

<u>3a. Ecuación</u>

$x_1 + 1/2x_5 - 1s_1 = 3\ ½$

$x_1 - 1s_1 = 3$

$s_2 = 1/2\ x_5 + 1/2$

	a	[a]	f =a-[a]
($3\ ^1/_2$)	1/2	3	1/2
(1/2)	1/2	0	1/2

Existe un empate, por lo que se elige la ecuación que corresponda a la variable básica con la mayor contribución en la función objetivo (la ecuación 1). Tenemos el 2do. Corte y se añade la ecuación $s_2 - 1/2\ x_5 = -1/2$.

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	s_2	b
1	0	0	0	0	0	1	0	7

0	0	0	1	0	-1/2	-2	0	1 1/2
0	0	0	0	1	3/2	-4	0	3 1/2
0	1	0	0	0	1/2	-1	0	3 1/2
0	0	1	0	0	-1	3	0	0
0	0	0	0	0	-1/2	0	1	-1/2

Utilizando Dual-Simplex para determinar la variable que entra en solución

Max {(0/-1/2) = Max {0} entra x_5 en solución.

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	s_2	b
1	0	0	0	0	0	-1	0	7
0	0	0	1	0	0	-2	1	2
0	0	0	0	1	0	-4	3	1
0	0	0	0	0	1	0	-2	1
0	0	1	0	0	0	3	-2	1
0	1	0	0	0	0	-1	1	3

Solución Óptima:

Por

Programación lineal	Programación entera
x_1= 2.75	x_1= 3
x_2= 2.25	x_2= 1
x_4= .5	x_3= 1
	x_4= 2
	x_5= 1
Z^*= 7.75	Z^*=7

Determinación de las ecuaciones correspondientes a los cortes y que deberán ser añadidas a las ecuaciones del problema original, que al ser resuelto se obtenga una solución entera.

1er. Corte

Tenemos que s_1-1/2x_3- 1/4x_5 = -3/4 que equivale a 1/2x_3 + 1/4$x_5 \geq$ 3/4y como x_3 en la 1ª restricción $x_1 + x_2 + x_3 = 5$ es igual a $x_3 = 5 - x_1 - x_2$

y x_5 en la 3ª restricción $6x_1 + 2x_2 + x_5 = 21$ es igual a $x_5 = 21 - 6x_1 - 2x_2$

sustituyéndolas en el 1er. Corte, tenemos que

$1/2(5 - x_1 - x_2) + ¼(-6x_1 - 2x_2 + 21) \geq 3/4$, reduciendo encontramos que: $2x_1 + x_2 \leq 7$

2do. Corte

Tenemos que s_2 -1/2 x_5 = -1/2 que equivale a 1/2 $x_5 \geq$ 1/2 y como en la 1ª restricción $6x_1 + 2x_2 + x_5 \leq 21$ es igual a $x_5 = -6x_1 - 2x_2 + 21$

sustituyéndolas en el 2do Corte, tenemos que

$-1/2(-6x_1 - 2x_2 + 21) \geq -1/2$, reduciendo encontramos que: $3x_1 + x_2 \leq 10$

Solución Gráfica

Max. $Z = 2x_1 + 1x_2$

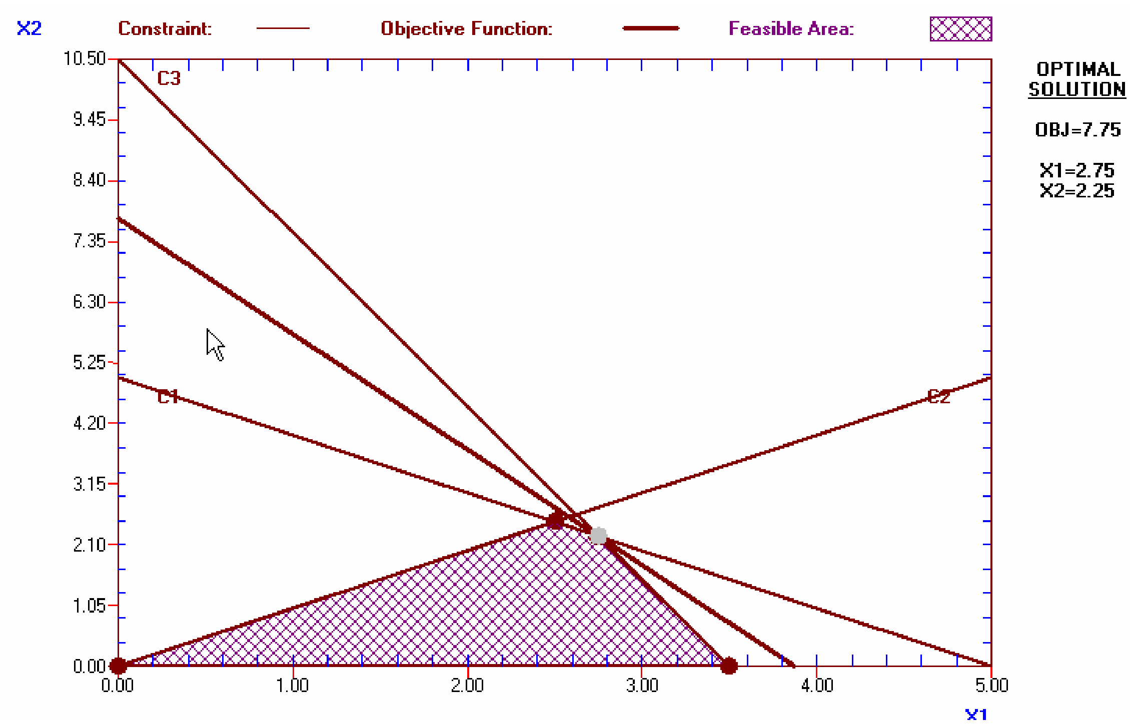
Sujeto a ;

$x_1 + x_2 \leq 5$

$-x_1 + x_2 \leq 0$

$6x_1 + 2x_2 \leq 21$

$x_1 , x_2 \geq 0$, enteros



Max. $Z = 2x_1 + 1x_2$

Sujeto a ;

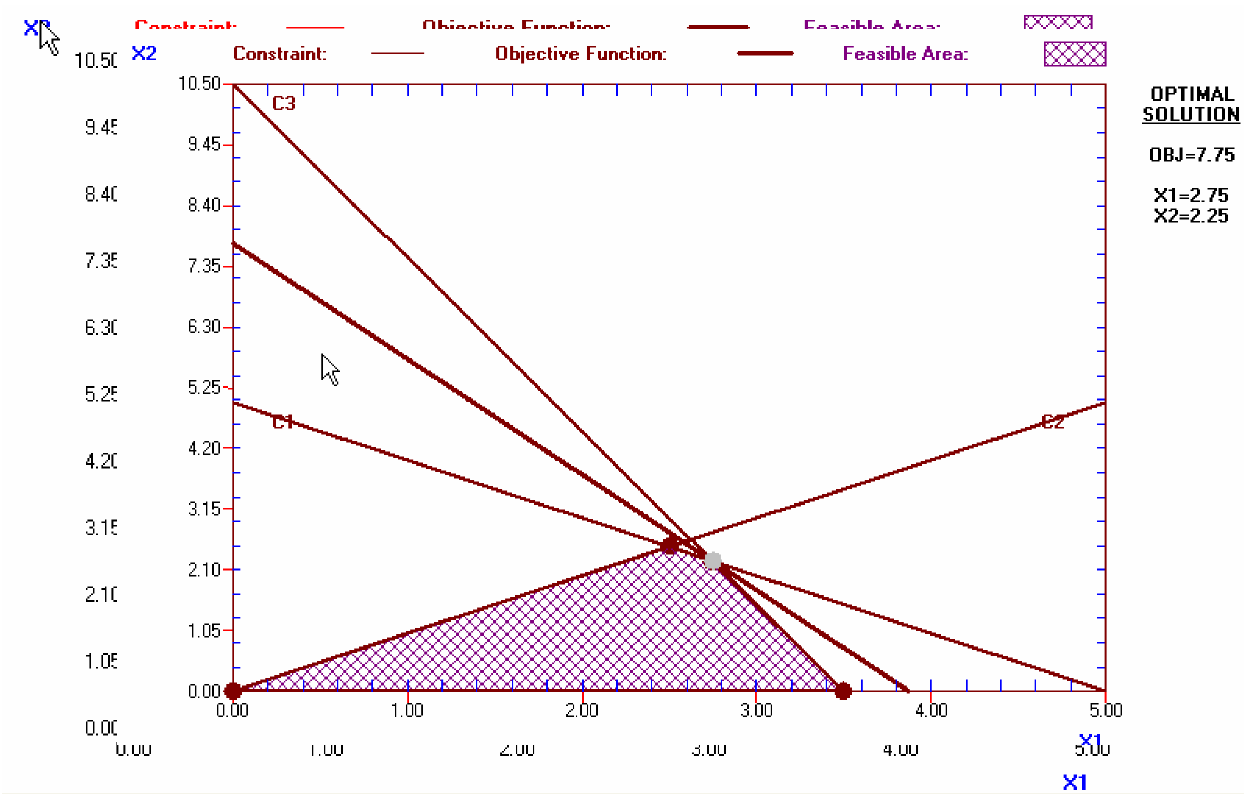
$x_1 + x_2 \leq 5$

$-x_1 + x_2 \leq 0$

$6x_1 + 2x_2 \leq 21$

$2x_1 + x_2 \leq 7$

$x_1, x_2 \geq 0$, enteros



Max. $Z = 2x_1 + 1x_2$

Sujeto a ;

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &\leq 5 \\
-x_1 + x_2 &\leq 0 \\
6x_1 + 2x_2 &\leq 21 \\
2x_1 + x_2 &\leq 7 \\
3x_1 + x_2 &\leq 10 \\
x_1, x_2 &\geq 0 \text{, enteros}
\end{aligned}
$$