Capítulo 2 Generación de Números Aleatorios

II.1 Introducción

La vida real raramente es determinística. Muchas de las influencias externas a un sistema bajo estudio (tal como el arribo de las entidades) y el comportamiento de los componentes internos del sistema (tales como la duración del tiempo de servicio) siguen un patrón no determinístico o aleatorio. El arribo de los clientes a una lavandería, el tiempo de uso de una computadora y el tiempo de traslado de tu casa a tu lugar de trabajo, son ejemplos representativos de esta situación. Para construir un modelo de simulación representativo de un sistema bajo estudio es necesario recrear los efectos aleatorios que están presentes en el sistema. En este capítulo se presentan los conceptos de aleatoriedad y pseudo aleatoriedad, algunos métodos numéricos para la generación de números aleatorios, algunos métodos para probar la aleatoriedad de los números generados, el método de Monte Carlo y algunos ejercicios de simulación donde se aplican los conocimientos cubiertos.

II.2 Efectos de la aleatoriedad en la simulación

Un método posible para re-crear los efectos aleatorios que están presentes en el sistema, es el uso del conjunto de datos obtenidos del mundo real y elaborar el modelo sujeto a exactamente a los mismos patrones de datos. Sin embargo, existen algunos problemas con el uso de este tipo de datos.

Primero

Los datos están limitados generalmente en número; el numero de datos que pueden ser reunidos es frecuentemente limitado debido al tiempo y al costo asociado con la obtención de datos. Esto limita la longitud de la simulación a la longitud del período de obtención de datos.

Segundo

Los datos están disponibles solo si los sistemas están actualmente operando. Un papel importante en la simulación es el diseño de sistemas no existentes.

Tercero

No es posible de realizar fácilmente un análisis de sensibilidad usando datos reales.

Cuarto

Debido a que los datos obtenidos generalmente no están en forma leíble para la computadora, capturar grandes cantidades de datos en la computadora requiere demasiado tiempo.

Idealmente el modelo sujeto a los datos reales debería desempeñarse exactamente que el sistema que simula, y por esto las estadísticas resultantes deberían corresponder cercanamente a las estadísticas obtenidas del desempeño del sistema actual.

Es necesario desarrollar un procedimiento para generar datos aleatorios artificialmente de acuerdo a las especificaciones del analista. El procedimiento sigue los pasos siguientes:

Paso 1 Obtener datos reales en cantidad suficiente para servir como una fuente confiable de la actual población estadística.

Paso 2 Desarrollar un análisis estadístico de la muestra para identificar la naturaleza (distribución de probabilidad y sus parámetros) de la población estadística de la cual la muestra es tomada.

Paso 3 Usar un instrumento como mecanismo que sea capaz de crear un numero ilimitado de variables aleatorias que sea representativo por la población identificada en el paso 2.

II.3 Generador de Números Aleatorios

Existen diferentes formas de obtener números aleatorios:

- **Provisión externa Tablas de Rand (números aleatorios)**
- **Generación interna a partir de un proceso físico al azar**
- **Generación interna de sucesiones dígitos por medio de una relación de recurrencia**

II.3.1 Provisión Externa: Tablas RAND

Se tiene la ventaja de que la serie de números obtenida de una tabla es reproducible y se tiene como inconveniente la lentitud para su obtención y que se requiere una gran cantidad de memoria para su almacenamiento. En el apéndice de tablas al final del capítulo se muestra una tabla tomada de la Corporacón Rand, "*A Million Random Digits with 100,000 Normal Deviates*" (New York: The Free Press, 1955)

II.3.2 Generación interna a partir de un proceso físico al azar.

Algunos métodos para crear ciertos resultados aleatorios usan instrumentos físicos (monedas, dados, y ruletas). Algunas técnicas numéricas pueden ser usadas en la generación de números aleatorios, y después estos números aleatorios serán usados para generar las variables aleatorias.

Limitaciones de los instrumentos físicos para generan números aleatorios:

1.- Los instrumentos físicos no pueden generar números aleatorios verdaderos a menos que sean altamente elaborados técnicamente y caros.

2.- Es un proceso de generación caro

3.- Los flujos de números aleatorios generados por los instrumentos físicos son **no repetitivos**. La propiedad de repetibilidad es deseable considerando la necesidad de que varios escenarios de modelación están sujetos al mismo conjunto de efectos aleatorios.

II.3.3 Generación interna de sucesiones dígitos por medio de una relación de recurrencia

Las metodologías por software para generar números aleatorios han sido desarrolladas vía técnicas numéricas. A este proceso se le denomina **Generación de Números Pseudoaleatorios**. La palabra pseudoaleatorio sugiere que los números generados están inte-relacionados a través de relaciones numéricas y realmente no son independientes uno del otro.

Propiedades deseables de los generadores de números Pseudoaleatorios:

1.- Deben ser uniformemente distribuidos entre el rango continuo de cero a uno.

2.- El número generado debe ser tan independientemente posible de otro numero; idealmente, no debe existir autocorrelación entre ellos.

3.- El generador debe ser tan rápido y no deberá requerir una excesiva memoria de la computadora.

4.- Los números generados deben tener un ciclo largo antes de que la secuencia se repita.

5.- Deberá ser posible regenerar el flujo de números aleatorios (son reproducibles) para repetir patrones similares a los varios escenarios de modelación a que se puede estar sujeto.

6.- Deberá ser posible generar flujos múltiples de números aleatorios los que deben ser independientes unos de otros. Esta propiedad permite la asignación de flujos de dedicados a ciertos módulos dentro del modelo.

Algunos métodos para generar números pseudoaleatorios son:

- **Método de Centros al Cuadrado**

- **Método de Congruencia Lineal**
  - **Método de Congruencia Mixto**
  - **Método de Congruencia Multiplicativa**

- **Generadores combinados**

II.3.3.1 Método de Centros al Cuadrado

Uno de los métodos más simples para la generación de números Pseudoaleatorios es el método de Centros al cuadrado (*middle square)*. Jon von Neumann en 1946 sugirió la generación de números aleatorios realizando operaciones aritméticas en una computadora, elevando al cuadrado el número previo y extrayendo los dígitos centrales. Aunque este método generalmente tiene un pobre desempeño (si un cero aparece en la secuencia, este será eternamente perpetuo), la simplicidad de este algoritmo lo hace apropiado para demostrar el concepto de la generación de los números Pseudoaleatorios. Para obtener los números aleatorios de n-dígitos, el procedimiento de centros al cuadrado es el siguiente:

1.- Seleccione un número de n-dígitos

2.- Obtenga el cuadrado del número. Si el numero de dígitos del resultado es menor que 2n, agregue los ceros a la izquierda necesarios para hacer el numero par entre n dígitos o igual de 2n dígitos de longitud.

3.- Tome lo n dígitos centrales del numero encontrado en el paso 2.

4.- Coloque un punto decimal antes del primer dígito del numero encontrado en el paso 3, el numero fraccional resultante es un numero aleatorio.

5.- Sustituya el número encontrado en el paso 3 en el paso 2 y repita el proceso.

El siguiente ejemplo numérico demuestra este algoritmo para el caso de 4-dígitos.

Trabajando con 2n dígitos

S0 = Semilla = 5625

$S1 = (5625)^2 = 31|6406|25$ r1=0.6406

$S2 = (6406)^2 = 41|0368|36$ r2=0.0368

$S3 = (0368)^2 = 00|1354|25$ r3=0.1354

$S4 = (1354)^2 = 01|8333|16$ r4=0.8333

$S4 = (8333)^2 = 69|4388|89$ r5=0.4388

………………………………

Trabajando con un valor par menor o igual a 2n dígitos

S0 = Semilla = 5625

$S1 = (5625)^2 = 31|6406|25$ r1=0.6406

$S2 = (6406)^2 = 41|0368|36$ r2=0.0368

$S3 = (0368)^2 = 1|3542|4$ r3=0.3542

$S4 = (1354)^2 = 12|5457|64$ r4=0.5457

$S4 = (8333)^2 = 29|7788|49$ r5=0.7788

……………………………….

A pesar de la simplicidad de este método, este no es generalmente usado debido a su debilidad. Por ejemplo este método puede rápidamente degenerar dependiendo de la elección del número semilla. Esto se puede demostrar eligiendo una semilla con valor de 500:

S0 = Semilla = 5500

$S1 = (5500)^2 = 30250000$ r1=0.2500

$S2 = (2500)^2 = 06250000$ r2=0.2500

Note que los valores subsecuentes de los números aleatorios serán los mismos. Otra debilidad de este método es que si él numero generado es cercano a cero (teniendo varios ceros después del punto decimal), todos los números subsecuentes serán también muy pequeños.

El desempeño de todos los métodos numéricos depende del tamaño de la palabra de la computadora que ejecuta las operaciones relativas, debido a que los posibles tamaños de los números mayores y menores son influenciados por el numero de bits que abarca el tamaño de la palabra de la computadora (usualmente 16 o 32).

II.3.3.2 Método de Congruencia Lineal

El método de congruencia lineal es la técnica mas ampliamente usada para generar números aleatorios, tal como se describirá mas adelante en detalle. También se reporta una extensión de este método que produce secuencias con periodos largos. Muchos otros métodos han sido propuestos, y estos son revisados en Bratley, Fox y Schrage [1987], Law y Kelton [1991] y Ripley [1987]

Los números generados son pseudoaleatorios, cumplen con las pruebas de aleatoriedad, son determinísticos (dirigidos) y son determinados a partir del último número generado. Este método produce una secuencia de números enteros $X_1, X_2, ...$ entre cero y m-1 de acuerdo a ls siguiente relación recursiva:

$$\mathbf{X_i = (aX_{i-1} + C) \bmod m}$$

El valor inicial de la semilla $\mathbf{X_0}$ se llama semilla, **a** es la constante multiplicativa, **c** es el incremento, y **m** es el modulo.. Si $c \neq 0$, se tiene el **método de congruencia mixta**. Cuando c=0, se tiene el **método de congruencia multiplicativa**.

En los métodos de congruencia la longitud del ciclo de repetición del numero aleatorio es siempre mas pequeño que el parámetro **m**. Por esto, un valor relativamente grande de **m** es deseable, Un valor de $\mathbf{2^k - 1}$, donde **k** es el tamaño de la palabra de la computadora, trabaja bien, como lo es $\mathbf{a=2^k + 5}$. Siempre que el parámetro **c** sea primo relativo a **m**.

Debido a que las herramientas de los lenguajes de programación y de los simuladores están equipadas con rutinas generadoras de números aleatorias pre-probadas, los usuarios raramente tienen necesidad de crear sus propios programas generadores de números aleatorios.

Propiedades secundarias que deben ser consideradas. Estas incluyen la densidad máxima y el periodo máximo.

Primero. Note que los números generados pueden únicamente asumir valores de un conjunto **I**={0, 1/m, 2/m, 3/m, 4/m,........,(m-1)/m.}, ya que $\mathbf{X_i}$ es un entero en el conjunto {0, 1, 2, 3,...,m}. Por lo que cada $\mathbf{R_i}$ es discreto en **I**, en lugar de ser continuo sobre el intervalo [0,1]. Esta aproximación aparece parece ser de poca consecuencia dado que el modulo de **m** es un entero demasiado grande. (Valores tales como $m=2^{31}-1$ y $m=2^{48}$ son de uso común en los generadores como GPSSS/H, SIMSCRIPT II.5, SLAM II, SIMAN V, y otros lenguajes.) Por máxima densidad se entiende que los valores asumidos por $\mathbf{R_i}$, i=1,2,...., dejan huecos no grandes en [0,1].

Segundo, para ayudar a lograr una densidad máxima y evitar el Ciclaje (por ejemplo, recurrencia de la misma secuencia de los números generados) en aplicaciones prácticas , el generador deberá tener el periodo mas grande posible. El periodo máximo puede ser logrado con la adecuada elección de a, c, m y X_0; Law y Kelton [1991].

- Para m a la potencia 2, digamos $m=2^b$, y $c\neq0$, el periodo mas largo posible es $P = m = 2^b$, el cual el logrado dado que **c** es relativamente primo a **m** (que es, el factor común mayor de **c** y **m** es 1), y a=1+4k, donde **k** y **b** son enteros.
- Para **m** a la potencia de 2, digamos $m=2^b$, y c=0, el periodo mas largo posible es P = m/4 $=2^{b-2}$, el cual se obtiene dado que la semilla $\mathbf{X_0}$ es impar y el multiplicador, **a** esta dado por a=3+8k o a=5+8k, para **k** y **b** enteros.
- Para **m** un numero primo y c=0, el periodo mas largo posible es P = m-1 el cual se obtiene dado que el multiplicador, **a** tiene la propiedad de que el entero mas pequeño **k** tal que a^k-1 es divisible por **m** es k=m-1.

Números Primos

Un número es primo cuando es entero positivo, distinto de 0 y 1y que únicamente se puede dividir por sí mismo y por 1 para dar una solución exacta (por tanto, para todos los otros números por los que intentemos dividir el número primo no dará solución exacta).

http://www.geocities.com/CapeCanaveral/Launchpad/2208/

Ejemplos:

Divisores de 3= {1, 3} => es primo

D(7)={1, 7} => es primo

D(9)={1, 3, 9} => no es primo, es divisible por 3 además de 1 y 9

Factores primos

Los factores primos de un número son aquellos números primos que son divisores exactos de dicho número. Por ejemplo, los factores primos del nº 24 son el 2, 2, 2 y 3 (no son factores primos el 4, el 6, el 8 o el 12, porque aunque son divisores exactos, no son primos).

http://www.esi.unav.es/Asignaturas/Informat2/C/Ejerres/Ex_feb6/exam_c.htm

Relativamente primos

a y *n* son relativamente primos si no tienen factores en común sino "1", o sea que *gcd(a,n)* = 1. Calcular *gcd(a,n)* con el algoritmo de Euclídes.

Donde gcd= Máximo Común Divisor por sus siglas en ingles.

Por ejemplo 6 y 4 no son relativamente primos porque tienen en común el 2

Por ejemplo 6 y 11 son relativamente primos porque 6=2*3 y 11=11. (11=6x1+5, 6=2x3+0)

Mínimo Común Múltiplo

El mínimo común múltiplo de dos o más números, es el número más pequeño posible, que es múltiplo de esos números.

Por ejemplo: El mínimo común múltiplo de los números 100, 200, 300, es 600, pues 600 es el número más pequeño que es múltiplo de 100, 200 y 300.

Para calcular el mínimo común múltiplo de dos o más números se descomponen los números en factores primos

$100 = 2^{2} \cdot 5^{2}$

$200 = 2^{3} \cdot 5^{2}$

$300 = 2^{2} \cdot 3^{1} \cdot 5^{2}$

y se cogen los factores comunes y no comunes con su mayor exponente.

En nuestro caso $2^{3} \cdot 3^{1} \cdot \mathbf{5^{2}} = 600$

Algoritmo de Euclides

Sean a y b los números de los que queremos calcular el máximo común divisor (MCD).

MCD(a,c) Es decir, el mayor entero positivo que divide a ambos.

Hacemos las siguientes divisiones hasta que el resto de una de ellas sea cero.

$a = cq_1 + r_1$

$c = r_1 q_2 + r_2$

$r_1 = r_2 q_3 + r_3$

$r_2 = r_3 q_4 + r_4$

....

$r_n - 1 = r_n\, q_n + 1 + 0$

Siendo q_1, q_2, ... los cocientes y r_1, r_2, ... los restos. El máximo común divisor es $r_{n.}$

(En MCD(a,c), r_n el mayor entero positivo que divide a ambos.)

Ejemplo: Calcular el MCD de 200 y 162,

200 = 162 x 1 + 38

162 = 38 x 4 + 10

38 = 10 x 3 + 8

10 = 8 x 1 + 2

8 = 2 x 4 + 0 El MCD de 200 y 162 es 2.

Máximo común divisor de varios números

Ejemplo: Calcular el MCD de 2353 y 1651

2353=1651x1+702

1651=702x2+247

702=247x2+208

247=208x1+39

208=39x5+13

39=13x3+0. El MCD de 2353 y 1651 es 13

Ejemplo: Calcular el MCD de 43 y 21

43=21x2+ 1

21=1x20+ 1

20=1x20 +0

El MCD de 43 y 21 es 1. Por lo tanto son relativamente primos

http://www.terra.es/personal/jftjft/Aritmetica/Numeros/AlgoEucl.htm

http://www.oma.org.ar/omanet/cym98/divcomeu.htm

II.3.3.2.1 Método de congruencia mixta

Relación:

$$X_i = (aX_{i-1} + C) \bmod m \qquad ; r_i = X_i /m \qquad (1)$$

donde $\mathbf{X_0}$ es la semilla

$\mathbf{X_n}$ es igual residuo de dividir lo que esta dentro del parámetro entre m.

Los parámetros **a**, **c**, y **m** también como la semilla son enteras no-negativas y deben satisfacer:

$\mathbf{0 < m, \; a < m, c < m \text{ y } X_0 < m}$

sean $X_0=1$, a=6, c=1, m=25; entonces;

$X_1= (6.1+1) \bmod 25$ $X_1= 7$ $r_1=7/25 = .28$

$X_2= (6.7+1) \bmod 25$ $X_2= 18$ $r_2=18/25 = .72$

$X_3= (6.18 + 1) \bmod 25$ $X_3= 9$ $r_3= 9/25 = .36$

La elección de los parámetros en el método de congruencia lineal, afecta significativamente la calidad de los números aleatorios generados por este método. Por ejemplo si se cambia **a** de 6 a 5, el primer numero generado será 0.4399, y todos los números generados después de esta serán los mismos (0.2399). Por este método de congruencia cuando los parámetros son seleccionados apropiadamente se tendrá mayor posibilidad de pasar las pruebas de aleatoriedad.

$\mathbf{m = 2^k - 1}$ **k= 16 ó 32 bits**

$\mathbf{a = 2^k +5}$

c es un numero primo relativo a **m**

k= 16 c=17

k= 32 c=17

k es el números de dígitos binarios en una palabra de la computadora usada.

Cuando c = 0 el algoritmo se denomina método de congruencia multiplicativa; de otra manera es llamado método de congruencia mixta.

Ejemplo:

Método de Congruencia Mixta

m	A	c	X0
100	1	43	27

X

N	aXn + c	aXn+c mod m	R
1	70	70	0.7
2	113	13	0.13
3	56	56	0.56
4	99	99	0.99
5	142	42	0.42
6	85	85	0.85
7	128	28	0.28
8	71	71	0.71
9	114	14	0.14
10	57	57	0.57
11	100	0	0
12	43	43	0.43
13	86	86	0.86
14	129	29	0.29
15	72	72	0.72
16	115	15	0.15
17	58	58	0.58
18	101	1	0.01
19	44	44	0.44

20	87	87	0.87
21	130	30	0.3
22	73	73	0.73
23	116	16	0.16
24	59	59	0.59
25	102	2	0.02
26	45	45	0.45
27	88	88	0.88
28	131	31	0.31
29	74	74	0.74
30	117	17	0.17
31	60	60	0.6
32	103	3	0.03
33	46	46	0.46
34	89	89	0.89
35	132	32	0.32
36	75	75	0.75
37	118	18	0.18
38	61	61	0.61
39	104	4	0.04
40	47	47	0.47
41	90	90	0.9
42	133	33	0.33
43	76	76	0.76
44	119	19	0.19
45	62	62	0.62
46	105	5	0.05
47	48	48	0.48
48	91	91	0.91
49	134	34	0.34
50	77	77	0.77

51	120	20	0.2
52	63	63	0.63
53	106	6	0.06
54	49	49	0.49
55	92	92	0.92
56	135	35	0.35
57	78	78	0.78
58	121	21	0.21
59	64	64	0.64
60	107	7	0.07
61	50	50	0.5
62	93	93	0.93
63	136	36	0.36
64	79	79	0.79
65	122	22	0.22
66	65	65	0.65
67	108	8	0.08
68	51	51	0.51
69	94	94	0.94
70	137	37	0.37
71	80	80	0.8
72	123	23	0.23
73	66	66	0.66
74	109	9	0.09
75	52	52	0.52
76	95	95	0.95
77	138	38	0.38
78	81	81	0.81
79	124	24	0.24
80	67	67	0.67
81	110	10	0.1

82	53	53	0.53
83	96	96	0.96
84	139	39	0.39
85	82	82	0.82
86	125	25	0.25
87	68	68	0.68
88	111	11	0.11
89	54	54	0.54
90	97	97	0.97
91	140	40	0.4
92	83	83	0.83
93	126	26	0.26
94	69	69	0.69
95	112	12	0.12
96	55	55	0.55
97	98	98	0.98
98	141	41	0.41
99	84	84	0.84
100	127	27	0.27
101	70	70	0.7

II.3.3.2.2 Método de Congruencia Multiplicativa

Relación:

$$\mathbf{X_i = aX_{i-1} \bmod m \qquad ; r_i = X_i / m \qquad (2)}$$

La Tabla 1 muestra la determinación del periodo de un generador congruencial multiplicativo para $a = 13$, $m = 2^6 = 64$, $X0 = 1, 2, 3, 4$. Se puede ver que el máximo periodo, 16, se alcanza para las semillas impares, y éste es igual al máximo teórico $P=m/4$ ya que $a=5+8k$ con $k = 1$.

Método de Congruencia Mixta

m	a	c	X0

64	13	0	1,2,3, Y 4

N	**Xo=1**	**Xo=2**	**Xo=3**	**Xo=4**
0	1	2	3	4
1	13	26	39	52
2	41	18	59	36
3	21	42	63	20
4	17	34	51	4
5	29	58	23	
6	57	50	43	
7	37	10	47	
8	33	2	35	
9	45		7	
10	9		27	
11	53		31	
12	49		19	
13	61		55	
14	25		11	
15	5		15	
16	1		3	

En este ejemplo, $m=2^6=64$ y $c=0$. El máximo periodo es por lo tanto $P = m/4 = 16$. Note que este periodo se logra usando semilla $X_0=1$ y 3 (impares), pero con semillas $X_0=2$ y 4(pares), produce periodos de ocho y cuatro, ambos menores del máximo. Note que $a=13$ es de la forma $5+8k$ con $k=1$, como se requiere para lograr el periodo de máxima longitud.

Cuando $X_0=1$, las secuencia generada toma valores del conjunto {1, 5, 9, 13, ...,53, 57, 61}. Los huecos en la secuencia de los números aleatorios generados, R_i son bastantes grandes (por ejemplo, el hueco es 5/64-1/64 o 0.0625, densidad insuficiente), el periodo es demasiado corto (tal hueco obtenido crea la preocupación acerca de la densidad de la secuencia generada); por lo tanto no se recomienda la utilización de este generador.

El generador en este ejemplo no es viable para cualquier aplicación – su periodo es demasiado corto y su densidad es insuficientemente pequeña. Sin embargo, el ejemplo muestra la importancia de la elección correcta de a, c, m y X_0.

Un generador bastante utilizado en la práctica tiene los siguientes parámetros $a = 7^5 = 16807$, $m=2^{31}-1 = 2147483647$ (un número primo) y $c = 0$. Estos valores aseguran un periodo $P = m-1$. Para una semilla igual a 123457, los valores generados son:

I	0	1	2	3
X	123457	2074941799	5598722160	1645535613
R	-------	0.9662	0.2607	0.7662

La velocidad y la eficiencia el uso de un generador en una computadora digital es también una selección a considerar. La velocidad y la eficiencia son apoyados por el uso de un modulo **m**, el cual esta a la potencia de 2. Ya que la mayoría de las computadoras digitales usan una representación binaria de los números, el modulo, o residuo, operación de la ecuación $X_{i+1}= aXi+c \bmod m$, puede ser realizada eficientemente cuando el modulo esta a la potencia de 2 (por ejemplo, $m=2^b$). Después de realizar aritmética ordinaria se obtienen los valores de aX_i+c, X_{i+1} es obtenido eliminando el dígito binario mas a la izquierda en aX_i+c y después usando los dígitos binarios b mas a la derecha. El siguiente ejemplo muestra, por analogía, esta operación usando $m=10^b$, debido a que la mayoría de lo humanos piensan en representación decimal.

Ejemplo

Sean $m=10^2 = 100$, $a=19$, $c=0$ y $X_0=63$, genere una secuencia de números aleatorios enteros usando la ecuación $X_{i+1}= (aXi+c) \bmod m$

$X_0=63$

$X_1= (19)(63) \bmod 100 = 1197 \bmod 100 =97$

$X_2= (97)(63) \bmod 100 = 1843 \bmod 100 = 43$

$X_3= (43)(63) \bmod 100 = 817 \bmod 100 = 12$

....

....

Cuando m esta a la potencia de 10, digamos $m=10^b$, la operación del modulo puede hacerse sin guardar los b dígitos (decimales) mas a la derecha. Por analogía, la operación del modulo es mas eficiente para computadoras binarias cuando $m=2^b$ para cualquier b>0.

II.3.4 Generadores combinados

Cuando la aplicación requiere de un periodo mayor al que se puede alcanzar con un generador simple, se recurre a los generadores combinados de congruencia lineal. Para generar la secuencia de *X*i y *R*i requerida, este generador necesita las salidas *X*i,j, *j* = 1..*k*, de *k* diferentes generadores de congruencia multiplicativa cuyos parámetros tienen los valores apropiados para asegurar un periodo m_j-1. El generador *j* produce la salida *X*i,j entera uniformemente distribuida de 1 a m_j-1. La combinación se calcula mediante las siguientes fórmulas:

$$X_i = \left(\sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} X_{ij} \right) \bmod \left(m_j - 1 \right) \quad \textbf{(3)}$$

$$R_i = \begin{cases} \dfrac{X_i}{m_1} & , X_i > 0 \\ \dfrac{m_i - 1}{m} & , X_i = 0 \end{cases} \quad \textbf{(4)}$$

El periodo máximo posible es:

$$P = \frac{(m_1 - 1)(m_2 - 1)....(m_k - 1)}{2^{k-1}} \quad \textbf{(5)}$$

Para computadoras de 32 bits se sugiere combinar dos generadores *k* = 2 con *m*1 = 2147483563, *a*1 = 40014, *m*2 = 2147483399 y *a*2 = 40692. La semilla del primer generador se toma del intervalo [1, 2147483562], y la semilla del segundo generador se toma del intervalo [1, 2147483398]. El periodo es (*m*1-1) (*m*2-1)/2 . $2x10^{18}$.

II.3.5 Otros Generadores

- Generadores Paralelos de números aleatorios.
- Sincronización; reproducibilidad; gasto transición]
- Generadores de Fibonacci retardados
- [Sincronización; reproducibilidad; gasto transición]
- Generadores Comerciales: IMSL Generador congruencial multiplicativo
  $m = 2^{31} - 1$,a = 16807; 397204094; 950706376

http://www.stat.cmu.edu/

Anexo

Los resultados teóricos que veremos a continuación facilitan la elección de los parámetros de "a y c" su demostración puede verse en el texto clásico

D. Knuth (1981): "The Art of Computer Programming". Ed. A. Wesley Vol N°2

Proposición 2.1

Ha sido probado por M. Greenberger en 1961 que en un generador congruencial la secuencia tendrá un periodo máximo **m**, sí y sólo sí;

i) m.c.d (c, m) = 1 ; (**c** es relativamente primo a **m**, es decir que son primos relativos)

ii) a - 1 mod p *; para cada factor primo **p** de* **m***.*

*(si **q** es un número primo que divide a **m**, entonces **q** divide a a-1)*

iii) a - 1 *mod* 4 ; si 4 divide a **m***.* *(Si 4 divide a **m**, entonces 4 divide a a-1)*

Por ejemplo si p=5 y m=100 en:

Si a=11, a-1=10, entonces en i) 10 mod 5 cumple pero no en ii) 10 mod 4

Si a=21, a-1=20, entonces en i) 20 mod 5 cumple, y también en ii) cumple 20 mod 4

Puesto que c esta asociado en la práctica con el efecto de traslación, inicialmente asumiremos (c=0), es decir partiremos estudiando los generador congruencial multiplicativos.

Dem: Donald Knuth Vol 2 (1981)

Obs: 1) Lo anterior sugiere elegir **m** lo más grande posible, para asegurarnos un período largo (posibles elecciones de m son; $m=2^{31}-1$, $m=2^{16}+1$)

2) Sea **p** el período de la secuencia de números aleatorios, si p=m el generador se llama de período completo.

3) Si **m** es un número primo entonces el máximo período se obtiene si a =1

Proposición 2.2 Sea un generador multiplicativo (c=0) [X_{n+1} = a X_n *mod* m] tiene período p=(m-1), sólo si **p** es primo. El periodo divide a (m-1) y es (m-1) si y sólo si **a** es una raíz primitiva de m-1, es decir $a^{(m-1)/p} \neq 1$ *mod* m, para todos los factores primos **p** de (m-1).

Cuando c=0, uno no puede obtener un periodo completo, pero para lograr el periodo máximo posible, lo siguiente deberá ser satisfecho:

1 **X_0** es relativamente primo a **m**
2 **a** es un elemento primitivo a modulo **m**

Pero es posible obtener un periodo de longitud m-1 pero generalmente el periodo es de alrededor de m/4.

http://www.cs.panam.edu/~meng/Course/CS6337/Note/master/node40.html

Proposición 2.3

Si a es un raíz primitiva de m, a^k *mod* m, lo es siempre que k y m-1 sean primos relativos.

Equivalentemente

Si a es una raíz primitiva de m, a^k *mod* m lo es siempre que ; mcd(k,m-1)=1

Dem: B. Ripley (1987) “Stochastic Simulation”Ed. John Wiley. pp 47

Obs: 1) En general los generadores congruenciales son de la forma

$$X_{n+1} = g\ (X_n, X_{n-1}, \ldots, X_{n-k}, \ldots)\ mod\ m$$

$g(\underline{x}) = a X_n$

$g(\underline{x}) = a X_n + c$

$g(\underline{x}) = a X_n^2 + c X_n + d$

Usando $g(\underline{x}) = (a_1 X_{n-1} + a_2 X_{n-2} + \ldots + a_r X_{n-r})$, se obtiene

un generador de Fibonacci retardado. La teoría de estos generadores se puede ver en Marsaglia (1985)]

2) Una buena elección de **m**, permite obtener un generador eficiente (ciclo máximo). Pero aún se debe estudiar con más detalle la elección de **a** y **c**, pues se tienen muchos grados de libertad.

3) Un buen generador congruencial debe ser:

i) De máximo período

ii) Su salida debe parecer aleatoria

iii) Poder implementar de forma eficiente en aritmética de 32 bits.

Un algoritmo de muy fácil implementación del tipo congruencial es $m = 2^{31}-1$

$a = 7^5$ (raíz primitiva de m)

$X_n = 7^5 X_{n-1}$ *mod* $(2^{31}-1)$

$$u_n = \left(\frac{X_n}{2^{31}-1}\right)$$

Dicho generador se encuentra en las bibliotecas IMSL y NAG

La famosa rutina RANDU, que un generador muy popular distribuido por IBM en los 60´s proporcionaba para sus equipos un modelo congruencial multiplicativo con $m = 2^{31}$; $a = 65539$; $c = 0$

$X_n = 65539\, X_{n-1}$ *mod* (2^{31})

$$u_n = \left(\frac{X_n}{2^{31}}\right)$$

Lo que sugiere cierta previsibilidad en su salida (Mal Generador ya que mas tarde se probo tener un problema serio.) Cambiar el número 65539 por 69069 mejora el desempeño significativamente.

¡Este generador proporciona tripletas consecutivas de números que caen en 15 planos! Lo que sugiere cierta previsiblidad en su salida (Mal Generador)

Barsaglia (1968) demostró que sucesiones consecutivas no superpuestas de n números aleatorios obtenidos de generadores multiplicativos caen en, a lo sumo [n! m] **1/n** hiperplanos paralelos.

Algunas cotas de casos representativos

	n=3	n=5	n=7	n=9	n=10
m = 216	73	23	16	14	13
m = 232	2953	220	80	48	41

Es decir, en un computador con palabras de 32 bits, menos de 41 hiperplanos contendrán las 10-úplas

En teoría puede conseguirse que un buen generador con m = 2^{32} produzca 357.913.941 puntos independientes en un cubo de dimensión 3, siendo el mínimo número de hiperplanos que contiene estos puntos 108, en contraste con los 2953.

Para la famosa rutina RANDU de IBM,

$$Xn = 65539\ Xn\ \mathit{mod}\ (2^{31})$$

las tripletas consecutivas de números caen en 15 planos.

II.4 Método de Monte Carlo

II.4.1 Introducción

La Simulación de Monte Carlo es una técnica que permite realizar un muestreo simulado. Con sólo conocer el comportamiento probabilístico del evento a través de una función de densidad, es posible obtener una cantidad ilimitada de muestras cuya tendencia será muy similar al comportamiento real. El método de Monte Carlo calcula la incertidumbre en el pronostico de eventos futuros.

El nombre de “Monte Carlo” fue acuñado por Nicholas Metropolis (inspirado por el interés en el juego de Stanislaw Ulam quién en 1946 se convirtió en el primer matemático en dignificar este enfoque con un nombre, en honor a un pariente que era propenso al juego; Hoffman 1998, p.239) durante el proyecto Manhattan en la Segunda Guerra Mundial, debido a la similitud de la simulación estadística a los juegos de oportunidad, y también a que la capital de Mónaco (Monte Carlo) era el centro de apuestas y similares situaciones. El método de Monte Carlo es ahora usado de manera rutinaria en diversos campos, desde la simulación de fenómenos físicos complejos tales como Diseño de reactores nucleares, Terapia de radiación para el cáncer, Evolución estelar, Exploración de pozos petroleros, etc. hasta Flujo de tráfico vehicular y aéreo, Pronósticos, portafolio de inversiones, simulación de un juego de Azar, etc.

II.4.2 Procedimiento

En lugar de usar un solo valor para cada variable en un modelo, usa muchos valores. El motor del método de Monte Carlo corre (trabaja) sobre el modelo una y otra vez usando diferentes valores para cada una de las variables en el modelo. Cada corrida es llamada “prueba”. Los resultados son tabulados, y después de un gran numero de pruebas, el pronóstico es mostrado como un solo valor, pero como un rango de valores.

La selección del valor para la variable de cada prueba es aleatorio. Pero los valores permitidos de la variable no son aleatorios. Estos son cuidadosamente calculados usando el mejor conocimiento de cómo la variable se comporta.
Cualquier método que resuelve un problema a través de generar números aleatorios apropiados y de observar que fracción del número cumple cierta propiedad o propiedades. Este método es útil para obtener soluciones numéricas a problemas que son muy complicados para resolverse de forma analítica.

El proceso para generar variables aleatorias que se apegan a esa distribución empírica es el siguiente:

- Partiendo de la distribución de probabilidad de la función se elabora la tabla que servirá para generar las variables aleatorias.
- El comportamiento del evento (E) se coloca en la columna 1, y en la columna 2 su correspondiente probabilidad (P)
- En la columna 3, se coloca correspondientemente probabilidad acumulada (PA)
- En la columna 4 se establece correspondientemente el rango de Monte Carlo (RMC) para cada tipo de evento

Este rango se obtiene de la forma siguiente:

Evento E_i	Probabilidad P_i	Probabilidad Acumulada (PA_i)	Rango de Monte Carlo
1	P_1	PA_1	$0 – PA_1$
2	P_2	PA_2	$PA_{1s} – PA_2$
.	.	.	PA_{2s} - ......
.	.	.	.
n	P_n	PA_n	$PA_{(n-1)s}$ - 1

donde PA_{is} es un valor inmediato superior a PA_i .

- Para generar variables aleatorias se genera un número pseudo aleatorio y se busca en que nivel del rango de Monte Carlo corresponde y la variable será el evento que se encuentre en el nivel encontrado.

Para demostrar el proceso, considere que la distribución de probabilidad (FDP) dada representa las toneladas de basura recolectadas por día por el departamento de limpieza de la ciudad. El objetivo es simular las toneladas de basura recolectadas en un día particular;

Toneladas de basura recolectadas por día	Probabilidad (FDP)
10	.10
20	.22
30	.25
40	.20
50	.12
60	.07
70	.04

Para iniciar el proceso se requiere desarrollar una distribución acumulada de probabilidad (FAP). Para esto, se requiere conocer la probabilidad de que las toneladas de basura recolectadas en un dado día sean menores o iguales a un valor dado. Ahora se puede lograr lo anterior sumando las probabilidades iniciando con la recolección de 10 toneladas por día.

La tabla siguiente proporciona la distribución de probabilidad original y la distribución de probabilidad asociada.

Toneladas de basura recolectadas por día	Probabilidad(FDP)	Probabilidad Acumulada (FAP)	Rango de Monte Carlo
10	.10	.10	0.0000 – 0.0999
20	.22	.32	0.1000 – 0.3199
30	.25	.57	0.3200 – 0.5699
40	.20	.77	0.5700 – 0.7699
50	.12	.89	0.7700 – 0.9599
60	.07	.96	0.8900 – 0.9599

70	.04	1.00	0.9600 – 1.0000

Debido a que cualquier distribución acumulada las probabilidades caerá dentro del rango de 0 a 1, una ocurrencia aleatoria (variación) correspondiente a una dada distribución de probabilidad puede ser generada seleccionando un número aleatorio entre 0 y 1, encontrando un rango en la distribución acumulada dentro del cual el número aleatorio cae, e identificando la variación asociada. Por ejemplo, considere que se genera el número aleatorio .4764; el nivel asociado de la recolección será de 30 toneladas de basura. Si se genera el número aleatorio .8416 el nivel de recolección de basura es de 50. Si se repite el proceso de muestreo para un número grande de veces (iteraciones), esperamos obtener un valor de 30 toneladas para un nivel de recolección del 25% de las veces, un valor de recolección de 50 toneladas 12% de las veces, un valor de recolección de 60 toneladas 7% de las veces, y así sucesivamente.

Obtener muestras de una distribución de probabilidad usando el Método de Monte Carlo es un proceso directo una vez que la curva de la probabilidad acumulada (distribución) se desarrolla.

En el anexo al final del capítulo se proporciona una Información básica para trabajar en Excel la simulación de Monte Carlo

II.4.3 Ejemplos

Ejemplo #1 Aviones de Carga

Considere el servicio terminal de una compañía de carga aérea que tiene muchos aviones de carga. Los aviones de carga son programados llegar a la terminal uno al principio del día, para una posible operación de mantenimiento. Cada avión es inspeccionado conforme arriba. Asuma que la duración de la inspección es mínima. Una vez que es inspeccionado, la probabilidad de encontrar un avión con necesidad de servicio de mantenimiento es de 0.5; que es, un promedio del 50% de los aviones tienen necesidad del servicio de mantenimiento. Sí un avión necesita servicio, la operación de mantenimiento puede tomar ya sea 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, o 3 días. La posibilidad de que un avión requiera cualquiera de estos servicios es de 1/6.

La compañía de carga generalmente utiliza una instalación de mantenimiento en la terminal. Cada avión en tierra le cuesta a la compañía $5000 por día. El administrador de la compañía esta interesado en investigar el atractivo económico de utilizar una instalación adicional de servicio en la terminal. Cada instalación le cuesta a la compañía $2500 por día rentarla y operarla.

Se elabora la tabla de donde se generará la información relativa a la duración del servicio

Probabilidad	Acumulada	Duración
1/6	0	0.5

1/6	0.166670	1
1/6	0.333340	1.5
1/6	0.500010	2
1/6	0.666680	2.5
1/6	0.833350	3

Para determinar si un avión al aterrizar requiere o no servicio, se considera por existir dos posibilidades; que existe un 50% de probabilidad de que requiera servicio y un 50% de que no requiera. Se analiza en la tabla siguiente el comportamiento de este sistema para una y dos instalaciones de servicio para 100 días de operación.

					Una Instalación de Servicio			Dos Instalaciones				
Día	Numero Aleatorio	Requiere Manto.	Numero Aleatorio	DDS	DIS	DTS	NDO	DIS	DTS1	DTS2	NDO	IN
1	0.2928	Si	0.5678	2.00	1.00	3	2.00	1.00	3	0	2.00	1
2	0.0314	Si	0.8073	2.50	3.00	5.5	3.50	2.00	3	4.50	1.00	2
3	0.0043	Si	0.9722	3.00	5.50	8.5	5.50	3.00	6	4.50	3.00	1
4	0.2567	Si	0.4721	1.50	8.50	10	6.00	4.50	6	4.50	2.00	2
5	0.5709	No	0.0000	0.00	0.00	10	0.00	0.00	6	4.50	0.00	
6	0.3235	Si	0.1473	0.50	10.00	11	4.50	6.00	6.5	4.50	0.50	1
7	0.8838	No	0.0000	0.00	0.00	11	0.00	0.00	6.5	4.50	0.00	
8	0.3805	Si	0.1980	1.00	10.50	12	3.50	8.00	9	4.50	1.00	1
9	0.7669	No	0.0000	0.00	0.00	12	0.00	0.00	9	4.50	0.00	
10	0.5615	No	0.0000	0.00	0.00	12	0.00	0.00	9	4.50	0.00	
91	0.4309	Si	0.1180	0.50	94.50	95	4.00	91.50	92	93.00	1.00	1
92	0.3604	Si	0.2066	1.00	95.00	96	4.00	92.00	93	93.00	1.00	1
93	0.0181	Si	0.2703	1.00	96.00	97	4.00	93.00	94	93.00	1.00	1
94	0.9460	No	0.0000	0.00	0.00	97	0.00	0.00	94	93.00	0.00	
95	0.2206	Si	0.6068	2.00	97.00	99	4.00	95.00	97	93.00	2.00	1

96	0.8654	No	0.0000	0.00	0.00	99	0.00	0.00	97	93.00	0.00	
97	0.2081	Si	0.2103	1.00	99.00	100	3.00	97.00	98	93.00	1.00	1
98	0.1012	Si	0.2152	1.00	100.00	101	3.00	98.00	99	93.00	1.00	1
99	0.8101	No	0.0000	0.00	0.00	101	0.00	0.00	99	93.00	0.00	
100	0.6454	No	0.0000	0.00	0.00	101	0.00	0.00	99	93.00	0.00	
			Tiempo Total Ocioso				251.00				78.00	
			Tiempo Promedio Ocioso				2.510				0.780	
			Costo Promedio Total				$15,050.00				$8,900.00	

DDS=Duración de los días de servicio, DIS=Día que inicio del servicio, DTS=Día que termina el servicio, NDO= Numero de días ociosos, DTS1,DTS2=DTS para la instalación 1 o 2.

A continuación se muestran 10 corridas del sistema y el promedio del análisis del costo con una y dos instalaciones, resultando más conveniente tener dos instalaciones

Una Instalación		Dos Instalaciones	
No. de Corridas	$11,025.00	No. de Corridas	$8,750.00
1	14625	1	9175
2	10150	2	9050
4	29950	4	9600
5	16350	5	8325
6	7550	6	8375
7	18075	7	9225
8	8450	8	9025
9	14175	9	9725
10	19375	10	8925
Promedio	$14,972.50	Promedio	$9,017.50

Ejemplo #2 Vendedor de Periódicos 1

Un vendedor de periódicos trata de maximizar sus ganancias. El número de periódicos que vende cada día es una variable aleatoria, sin embargo el análisis de los datos del mes pasado muestra la distribución de demanda diaria. Un periódico le cuesta $2.00, y este los vende en $3.00. Los periódicos que no se venden los regresa a la editorial y recibe $1.00

Para toda la demanda no satisfecha se estima un costo de $1.00 en clientela y ganancia perdida. Si la política es pedir una cantidad igual a la demanda del día anterior, determine la ganancia diaria promedio del vendedor mediante la simulación de este sistema. Suponga que la demanda del día anterior fue de 20 unidades. Determine la ganancia promedio si se simulan 7 días de la semana.

Probabilidad	.05	.15	.22	.38	.14	.06
Demanda por día	30	31	32	33	34	35

Demanda por día	Probabilidad	Probabilidad Acumulada	Rango de Monte Carlo
30	.05	.05	.0000 - .0499
31	.15	.25	.0500 - .0199
32	.22	.42	.2000 - .4199
33	.38	.80	.4200 - .7999
34	.14	.94	.8000 - .9399
35	.06	1.00	.9400 – 1.00

Día	No. Aleatorio	Compra	Demanda	Ingreso	Perdida	Ganancia
1	.305	22	32	220	100	120
2	.899	32	34	320	20	300
3	.354	34	32	320	20	300
4	.360	32	32	320	0	320
5	.917	32	34	320	20	300
6	.116	34	31	310	30	280
7	.723	31	33	310	20	290
						$1910

Ganancia diaria promedio = $1910 / 7 = $272.85

Ejemplo #3 La Panadería UNO:

La panadería "UNO" prepara pan fresco de cebolla diariamente. el pan se vende a $4 por pieza y cuesta $2 prepararlo. Al final del día, si quedan por vender algunas piezas de pan, otra panadería las comprará el 70% a $1 la pieza.

Se sabe que la demanda diaria (en docena de piezas) de pan fresco de cebolla en la panadería cae en un rango de 3 a 7 piezas apegada a una distribución uniforme. La panadería "UNO" esta considerando producir diariamente 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 docenas.

Simula 30 días y compare la ganancia diaria promedio y la desviación estándar bajo estas políticas de orden.

Precio Unitario	$4
Costo por Unidad	$2
Precio/unidad de Sobrantes	$1.0
Cantidad preparada	60

Simulación Día	No.Aleatorio	Demanda	Ingreso	Costo	No vendidos .7x (Preparadas - demanda)	Ganancia
1	0.35	48	$192	$120	$8.40	$80.40
2	0.51	60	$240	$120	$0.00	$120.00
3	0.88	84	$240	$120	$0.00	$120.00
27	0.35	48	$192	$120	$8.40	$80.40
28	0.27	48	$192	$120	$8.40	$80.40
29	0.35	48	$192	$120	$8.40	$80.40

30	0.77	72	$240	$120	$0.00	$120.00
					Promedio	$102.84
					Desv.Est.	$26.88

Producción Diaria	Promedio	Des.Est.
	$102.84	$26.88
24	$48.00	$0.00
36	$72.00	$0.00
48	$86.76	$17.04
60	$97.56	$32.36
72	$89.88	$50.40
84	$102.00	$58.21

No. de Simuladas	$102.84
1	89.64
2	102.84
3	96.24
4	94.92
5	97.56
6	97.56
7	93.6
8	93.6
9	101.52
10	94.92

Ejemplo #4 Vendedor de Periódicos 2

Un vendedor de periódicos trata de maximizar sus ganancias. En número de periódicos que vende cada día es una variable aleatoria, sin embargo, el análisis de los datos del mes pasado muestra una distribución de la demanda diaria. Un periódico cuesta $2.00 y se vende a $3.00. Los periódicos no vendidos son regresados a la editorial y se le devuelve $1.00 por periódico. Si la política es ordenar una cantidad igual a la demanda del día anterior, determine la ganancia diaria promedio del vendedor mediante la simulación del sistema. Suponga que la demanda del día cero son 22 periódicos.

Probabilidad	Prob.Acum.	Venta/día
0.05	0	30
0.15	0.15	31
0.22	0.2	32
0.38	0.42	33
0.14	0.8	34
0.06	0.94	35
Orden Inicial	22	

Día	No.Aleatorio	Cantidad Ordenada	Cantidad Vendida	Cantidad a devolver	Costo Periódicos	Ingreso por venta	Recupera por devolución	Ganancia Total
1	0.146039497	22	30	8	44	66	8	$30.00
2	0.465226909	30	33	3	60	99	3	$42.00
3	0.204796821	33	32	0	66	96	0	$30.00
4	0.520907847	32	33	1	64	99	1	$36.00
5	0.047294516	33	30	0	66	90	0	$24.00
996	0.146151174	33	30	0	66	90	0	$24.00
997	0.562005707	30	33	3	60	99	3	$42.00
998	0.669380273	33	33	0	66	99	0	$33.00

999	0.194992203	33	31	0	66	93	0	$27.00
1000	0.229756047	31	32	1	62	96	1	$35.00
								$33.19

Orden Inicial	
	$33.19
15	$33.25
17	$33.24
19	$33.29
21	$33.26
23	$33.25
25	$33.23
27	$33.22
29	$33.26
31	$33.18
33	$33.25
35	$33.25

La cantidad ordenada al inicio no incide en la ganancia promedio final

Ejemplo #5 Tienda de Bicicletas:

Un vendedor de una tienda grande de bicicletas obtiene un bono si se venden mas de cuatro bicicletas en un día. La probabilidad de vender mas de cuatro bicicletas es de sólo 0.40. Si el número de bicicletas que se vende es mas de cuatro, la distribución de ventas es la que se muestra a continuación:

Bicicletas Vendidas	5	6	7	8
Probabilidad	0.35	0.45	0.15	0.05

La tienda tiene cuatro modelos diferentes de bicicletas. El valor del bono depende del tipo de bicicletas vendidas. El bono para el modelo A es de $100 y de este tipo se venden el 40%. El modelo B constituye el 35% de las ventas y se paga un bono de $150. El bono para el modelo C es de $200, y estas bicicletas constituyen el 20% de las ventas. Por último, el modelo D paga un bono de $250 por cada venta pero si lo constituye el 5% de las ventas. Elabore un modelo de simulación para calcular el bono que puede esperar un vendedor de bicicletas

Probabilidad	Prob.Acum.	Venta > 4
0.4	0	No
0.6	0.6	Si

Probabilidad	Prob.Acum.	Número Vendido
0.35	0	5
0.45	0.35	6
0.15	0.8	7
0.05	0.95	8

Probabilidad	Prob.Acum.	Tipo de modelo vendido
0.4	0	A
0.35	0.4	B
0.2	0.75	C
0.05	0.95	D

Día	No.Aleatorio	Venta > 4	No.Aleatorio	No. de Bicis Vendidas	No.Aleatorio	Tipo de Modelo	Monto del Bono
1	0.43415598	No	----	----	----	----	----
2	0.05716015	No	----	----	----	----	----
3	0.58119526	No	----	----	----	----	----
4	0.12996407	No	----	----	----	----	----
5	0.58843679	No	----	----	----	----	----
2446	0.22242083	No	----	----	----	----	----
2447	0.60632961	Si	0.477826545	6	0.97438282	D	250
2448	0.62497196	Si	0.73060447	6	0.06091508	A	100
2449	0.45832253	No	----	----	----	----	----
2450	0.39685564	No	----	----	----	----	----
							149350

Monto Promedio del Bono	60.95918367

Ejemplo #6 Vendedor de Artículos

Un vendedor ofrece artículos puerta por puerta ha experimentado los siguientes resultados:

La probabilidad de que abran la puerta	0.3

Si abrieron	: la probabilidad de que sea mujer	0.8
	: la probabilidad de que sea hombre	0.2
La probabilidad de venta	:Si en mujer	0.15
	:Si es hombre	0.25

Cuando se hace la venta, el numero de suscripciones que se ordenan tienen la siguiente: distribución:

La ganancia por cada suscripción vendida es de $200. Simule 25 llamadas a la puerta y determínese la ganancia total.

Numero de Suscripciones	Probabilidad Hombre	Mujer
1	0.6	0.1
2	0.3	0.4
3	0.1	0.3
4	0	0.2

		Abren puertas	Si abrieron		Abrió
Probabilidad	Prob.Acum	Evento	Probabilidad	Prob.Acum	Evento
0.3	0	Si	0.8	0	Mujer
0.7	0.7	No	0.2	0.8	Hombre

Si fue mujer			Si fue hombre		
Probabilidad	Prob.Acum	Evento	Probabilidad	Prob.Acum	Evento
0.15	0	Venta	0.25	0	Venta
0.85	0.15	No venta	0.75	0.25	No venta

	Para Mujer	Suscripciones vendidas		Para Hombre	Suscripciones vendidas
Probabilidad	Prob.Acum	que ordena	Probabilidad	Prob.Acum	que ordena
0.6	0	1	0.1	0	1
0.3	0.6	2	0.4	0.1	2

0.1	0.9	3	0.3	0.5	3
0	1	4	0.2	0.8	4

Numero	No.aleatorio	Abren puerta	No.aleatorio	Abre Hombre o Mujer	No.aleatorio	Ordena	No.aleatorio	Cantidad de Suscripción	Ganancia
1	0.957988658	No	0.671346311	Mujer	0.503450471	No venta	0.598407559	0	0
2	0.972991209	No	0.171965066	Mujer	0.080243385	Venta	0.281614365	2	400
3	0.002724943	Si	0.946003643	Hombre	0.913109616	No venta	0.8608683	0	0
4	0.001200631	Si	0.798898347	Mujer	0.191988174	No venta	0.727183155	0	0
5	0.31786884	Si	0.877091084	Hombre	0.122861998	Venta	0.839007486	4	800
6	0.19713945	Si	0.103850118	Mujer	0.12333433	Venta	0.477777513	2	400
7	0.971590043	No	0.464279245	Mujer	0.897796359	No venta	0.469372205	0	0
8	0.637996158	Si	0.915747553	Hombre	0.768040401	No venta	0.136109282	0	0
9	0.944651937	No	0.940587656	Hombre	0.722701232	No venta	0.860128925	0	0
10	0.767511794	No	0.537502455	Mujer	0.022940396	Venta	0.508953387	3	600
11	0.087013154	Si	0.642538015	Mujer	0.577172797	No venta	0.625361709	0	0
12	0.809171743	No	0.888668162	Hombre	0.821345252	No venta	0.643043523	0	0
13	0.471397805	Si	0.54176344	Mujer	0.870072432	No venta	0.192677656	0	0
14	0.588561254	Si	0.498585231	Mujer	0.81688463	No venta	0.835280134	0	0
15	0.88905175	No	0.497526706	Mujer	0.421106877	No venta	0.901969637	0	0
16	0.576079597	Si	0.455132777	Mujer	0.070325115	Venta	0.874283002	4	800
17	0.856161771	No	0.544688716	Mujer	0.599208821	No venta	0.04115487	0	0
18	0.664661932	Si	0.39330377	Mujer	0.84765087	No venta	0.990521191	0	0

19	0.050448359	Si	0.11994632	Mujer	0.204135723	No venta	0.028264425	0	0
20	0.174100308	Si	0.796248166	Mujer	0.164566243	No venta	0.416400965	0	0
21	0.468482107	Si	0.685203293	Mujer	0.592863837	No venta	0.727067118	0	0
22	0.25936841	Si	0.737488425	Mujer	0.085145292	Venta	0.423237478	2	400
23	0.838514208	No	0.826603299	Hombre	0.282322743	No venta	0.902988929	0	0
24	0.905979756	No	0.465596926	Mujer	0.838735984	No venta	0.437425796	0	0
25	0.301669347	Si	0.170072522	Mujer	0.493564212	No venta	0.505456709	0	0
								Promedio	136
								Desv.Est.	262.8053779
								Mínima	0
								Máxima	800

Intervalo de confianza para la Media

$$\bar{x} \pm t_{\alpha/2} \bullet (S/\sqrt{n})$$

Límite Inferior	32.98224779
Límite Superior	239.0177522

Ejemplo #7 Preparación de Tortas

Un vendedor de Tortas produce 50 tortas diarias a un costo de $10 por torta y las vende en "la Loma" a un precio de $30 por torta. Las tortas que no se venden son tiradas al final del día, sin embargo, el vendedor aún no tiene permiso del ayuntamiento para tirar las tortas sobrantes en el basurero de "La Loma", por lo que si llegan a descubrirlo tirándolas lo multaran con $300 pesos.

La demanda de las tortas se comporta de la manera siguiente:

Demanda	10	20	25	30	50	70	100
Probabilidad	0.1	0.2	0.4	0.1	0.1	0.05	0.05

La probabilidad de que la policía atrape al vendedor tirando las tortas el del 25%. Con base en esta información calcule:

a) ¿Cuál el número promedio de tortas no surtidas?
b) ¿Cuál es el número promedio de tortas que hay que tirar?
c) ¿Cuál es la utilidad promedio por día?
d) Si el permiso para tirar las tortas en el basurero cuesta $200 por semana ¿Deberá el vendedor comprar el permiso o seguir tirando las tortas?

Probabilidad	Prob. Acum.	Demanda
0.1	0	10
0.2	0.1	20
0.4	0.3	25
0.1	0.7	30
0.1	0.8	50
0.005	0.9	70
0.005	0.95	100

Tortas demandadas 50

Prob.	Prob. Acum.	Atrapan
0.0000	0.2500	SI
0.2501	0.9999	NO

Costo/torta $8.00

Precio/venta $15.00

Multa por tirar las tortas $30.00

Día	No. Aleatorio	Prepara	Demanda	Vendidas	Sobrante	Ingresos	Costo prepara	Perdida por sobrantes	Multa atrapan tirándolas
1	0.76289849	50	30	30	20	$450.00	$400.00	$140.00	$0.00
2	0.63742287	50	25	25	25	$375.00	$400.00	$175.00	$0.00
3	0.34136556	50	25	25	25	$375.00	$400.00	$175.00	$0.00
4	0.76253220	50	30	30	20	$450.00	$400.00	$140.00	$30.00
5	0.04007758	50	10	10	40	$150.00	$400.00	$280.00	$0.00
6	0.81331581	50	50	50	0	$750.00	$400.00	$0.00	$0.00
7	0.78598853	50	30	30	20	$450.00	$400.00	$140.00	$30.00
8	0.40472205	50	25	25	25	$375.00	$400.00	$175.00	$0.00
9	0.98666716	50	100	50	0	$750.00	$400.00	$0.00	$0.00
1135	0.29791926	50	20	20	30	$300.00	$400.00	$210.00	$30.00
1136	0.07646345	50	10	10	40	$150.00	$400.00	$280.00	$0.00
1137	0.15893823	50	20	20	30	$300.00	$400.00	$210.00	$0.00

1138	0.14369017	50	20	20	30	$300.00	$400.00	$210.00	$0.00
1139	0.39254328	50	25	25	25	$375.00	$400.00	$175.00	$0.00
1140	0.37895823	50	25	25	25	$375.00	$400.00	$175.00	$0.00
1141	0.96012009	50	100	50	0	$750.00	$400.00	$0.00	$0.00
1142	0.55081103	50	25	25	25	$375.00	$400.00	$175.00	$0.00
						$476,775.00	$456,800.00	$177,205.00	$6,300.00

	$476,775.00	Ingresos por Venta
	-$456,800.00	Costo Torta
	$6,300.00	Multa
Utilidad	$26,275.00	

Si se desea determinar la cantidad de tortas a elaborar por día, tenemos:

Demanda	Utilidad
	$28,720.00
21	147774
22	151238
23	157327
24	156546
25	154865
26	161839
27	151803
28	153752
29	150601
30	145695
31	134249
32	130138
33	125367
34	128051

	35	117505

Variando la Demanda	Utilidad
	$28,720.00
10	79940
20	143710
25	161675
30	143835
35	119080
40	92495
45	56295

Ejemplo #8 Problema de Inversión

Una compañía de inversiones esta considerando una oportunidad de inversión en un proyecto de 4 años. Se estima que el retorno por cada uno de los años esta uniformemente distribuida entre $1000 y $1500. Considere un 10% de tasa de retorno, la compañía esta interesada en encontrar el valor esperado (media) y la varianza del valor presente del proyecto para propósitos de riesgo basado en la simulación del proyecto.

Se genera la relación $X = 0.91X_1+0.82X_2+0.75X_3+0.68X_4$ basada en P = F(1+i)^(-n)

Prueba	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Valor Presente
1	1304.28678	1123.3312	788.722667	792.934452	4009.275097
2	1072.06406	943.684228	1087.90655	937.951717	4041.606555
3	1011.25743	1153.72127	771.283213	885.526081	3821.787995
4	1316.14017	1062.14633	938.17405	803.843112	4120.303656
5	1117.49928	821.406615	1089.33864	769.811011	3798.055546
96	1237.05108	1018.02783	1013.3921	773.440545	4041.911552
97	1032.37706	1095.95416	871.149568	692.832608	3692.313395
98	1312.66736	1078.91844	845.700583	865.571927	4102.858313
99	1142.51156	1182.4495	826.061729	753.881666	3904.904457
100	1048.76212	958.726802	834.66856	892.320451	3734.477936
		Valor presente			3990.931094

		promedio			

II.4.4 Ejercicios de Simulación

Ejercicio #1
Una aerolínea usa varias unidades de energía auxiliar que son expuestas a servicios severos. Tres baleros son la fuente del problema. En el pasado, los baleros han sido remplazados conforme fallan. Con un nuevo énfasis en el control de costos y mantenimiento preventivo, el administrador desea evaluar las políticas de a) reemplazar los baleros cuando estos fallen, b) cuando un balero falle reemplazar los tres baleros; c) cuando un balero falle, reemplácelo junto con cualquier otro balero que haya estado en uso 1700 horas o más.

Se proporciona la información siguiente:

Tiempo de mecánico:	reemplazar 1 balero	5 horas
	reemplazar 2 baleros	6 horas
	reemplazar 3 baleros	7 horas
Tasa salarial de mecánico		$3000 por hora
Costo del balero		$5000
Costo por tiempo ocioso		$2000 por hora

La vida actual de servicio de los baleros es como sigue:

Vida de Baleros (horas)	Número de Baleros	Probabilidad

1100	3	0.015
1200	10	0.05
1300	12	0.06
1400	20	0.1
1500	27	0.135
1600	35	0.175
1700	30	0.15
1800	25	0.125
1900	18	0.09
2000	15	0.075
2100	4	0.02
2200	1	0.005
	200	1

Simule 15.000 horas de servicio para cada una de las políticas alternativas con los números aleatorios siguientes:

Balero # 1:

841, 584, 157, 599, 436, 255, 982, 525, 265, 247, 383, 288, 517, 883, 10

Balero # 2:

848, 888, 534, 412, 059, 501, 084, 899, 836, 715, 887, 878, 896, 377, 70

Balero # 3:

501, 921, 522, 870, 813, 446, 252, 378, 125, 316, 588, 522, 026, 616, 93

Ejercicio # 2

El hotel de un Aeropuerto tiene 100 cuartos. En una noche dada se reciben hasta 105 reservaciones debido a la posibilidad de que no todos se presenten. Los registros indican que el número de reservaciones diarias se distribuye uniformemente en el intervalo de enteros de 96 a 105. Esto es, cada número entero tiene una probabilidad de ocurrir de 0.1.

Los clientes que no llegan se representan por la siguiente distribución:

No. Que no se presenta	0	1	2	3	4	5
Probabilidad	.1	.2	.25	.30	.10	.05

Elabore un modelo de simulación para determinar el número esperado de cuartos usados por noche y el porcentaje de noches en las que hay clientes para más de 100 cuartos.

Ejercicio #3

Un especialista del corazón programa 16 pacientes por día, uno cada 30 min. Iniciando a las 9 a.m. Se espera que los pacientes lleguen a sus citas a las horas programadas: Sin embargo, la experiencia muestra que el 10% de los pacientes llegan 15 min. Antes, 25% llegan 5 min. Antes, 50 % a la hora, 10% llegan tarde y 5% llegan 15 min. Tarde. El tiempo que pasa el especialista varia dependiendo de su problema. Simula la jornada del doctor.

Duración	24	27	30	33	36	39
Probabilidad	.1	.2	.4	.15	.1	.05

Ejercicio #4

La biblioteca del Tecnológico tiene una copiadora para uso de los estudiantes. Estos llegan a la máquina con una distribución de tiempos entre llegadas como se muestra a continuación

Tiempo entre llegadas (minutos)	1	2	3	4	5
Probabilidad	.2	.25	.4	.1	.05

El tiempo que se tarda en hacer una copia esta distribuido de la manera siguiente

Duración (segundos)	2	9	16	21	28	31
Probabilidad	.1	.2	.3	.2	.1	.1

Un análisis de los datos acumulados muestra que el número de copias que hace un estudiante al pasar a la máquina se comporta de la manera siguiente

Numero de copias	6	7	8	9	10
Probabilidad	.2	.25	.35	.15	.05

El bibliotecario cree que con el sistema actual, la cola en la copiadora es demasiado larga y que el tiempo que un estudiante pasa en el sistema (tiempo de espera + tiempo de servicio) es demasiado. Construya un modelo de simulación para estimar la duración promedio del tiempo de espera en la cola y el tiempo de espera estimado del sistema.

Ejercicio #5

Iniciando con una semilla de 5983 genere 10 números aleatorios de 3 dígitos usando el método de centros al cuadrado.

Ejercicio #6

Usando el método de congruencia lineal con parámetros X_0=97, a=62541, c=19, y m=1000, genere 10 números aleatorios de 3 dígitos.

Anexo
Información básica para trabajar el Excel la simulación de Monte Carlo.

Ejemplo de Función =BUSCARV

Esto se pone serio. Vamos a seguir con una de las funciones más útiles que existen de cara al control de una lista de argumentos como podrían ser, por ejemplo, productos de una empresa. Observa la sintaxis de la función **=BUSCARV( )**

=BUSCARV(Celda;Rango;Columna)

Es decir, buscará el valor de una celda en un rango de celdas y retornará el contenido de **n** columnas a su derecha.

Ahora más claro. ¿Qué significa esto? Supongamos que tenemos un listado de productos tal que así:

	A	B	C
1	Código a buscar:		A-5
2	Descripción del producto:		Braguitas
3	Cantidad en almacén:		230
4			
5			
6	**Código**	**Descripción**	**Cantidad**
7	A-1	Dodotis	150
8	A-2	Pañales	200
9	A-3	Chupetes	250
10	A-4	Biberones	160
11	A-5	Braguitas	230
12	A-6	Camisetas	300
13	A-7	Sonajeros	45
14	A-8	Andadores	100
15	A-9	Peucos	25

Suponte que es un lista súper larga de artículos en almacén. Observa que en la parte superior hemos preparado tres casillas de color. Estas celdas servirán para nuestro propósito. En la celda **C2** colocaremos la fórmula:

=BUSCARV(C1;A7:C15;2)

¿Para qué servirá esta hoja? Lo que haremos será escribir un código de artículo en la celda C1 (amarilla) y Excel hará que aparezca automáticamente la **descripción** y la **cantidad** disponible en las celdas inferiores.

Este tipo de hojas va perfecto para hacer una consulta a un listado. La fórmula mirará lo que hay en la celda **C1**, y lo buscará en el rango **A7:C15**. Una vez que lo encuentre, (lo encontrará en la 1ª columna), mostrará lo que hay **2** columnas a su derecha (contándose ella), es decir, la descripción del producto.

Observa detenidamente los tres argumentos que nos pide la función =BUSCARV, primero la celda donde estará lo que intentamos buscar (el código), luego el rango donde ha de buscarlo, y por último el número de columna que queremos mostrar.

Ahora, escribiremos la fórmula para la celda **C3**. Básicamente es igual a la anterior, pero ahora el número de columna será el **3**, es decir, mostrará la cantidad:

=BUSCARV(C1;A7:C15;3)

Ahora sólo faltará comprobar las dos fórmulas escribiendo cualquier código de la lista de artículos en la celda **C1**.

Un detalle importante de la función =BUSCARV( ) es que si la lista o rango donde hay que buscar está desordenada, tendremos que añadir la palabra **FALSO** al final de la fórmula. Observa este ejemplo:

=BUSCARV(C1;A7:C15;2;FALSO)

En nuestro caso no hace falta, pues la lista está alfabéticamente ordenada.

Para elaborar un tabla de frecuencia de los valores dados realice los pasos que se describen a continuación:

Paso 1: Elabore una columna con los límites superiores C10:C19

Paso 2: Resalte las celdas D10:D19

Paso 3: Entre la formula =frecuencia(B2:C6,C10:C18)

y presione la tecla F2

Paso 4: Presione Ctrl-Mayús-Intro

	A	B	C	D
1		Valores		
2		16	76	34
3		51	61	91
4		64	35	68
5		95	82	37
6		62	76	46
7				
8				
9		Rango	Limite Sup	Frecuencia
10		0 a 10	10	0
11		11 a 20	20	1
12		21 a 30	30	0
13		31 a 40	40	3
14		41 a 50	50	1
15		51 a 60	60	1
16		61 a 70	70	4
17		71 a 80	80	2
18		81 a 90	90	1
19		arriba de 90	>90	2

Usando las funciones BUSCAR

Las tablas Buscar son útiles cuando se desea comparar un valor particular de un conjunto de valores, y dependiendo de donde encuentre el valor, se asigna una dada “respuesta”. Por ejemplo, podemos tener una tabla siguiente de frecuencias en la ocurrencia de una evento

Probabilidad	Prob.Acum.	Venta/día
0.05	0	30
0.15	0.15	31
0.22	0.2	32
0.38	0.42	33
0.14	0.8	34
0.06	0.94	35

Para un determinado *número aleatorio* en B16, cual es la *Cantidad vendida* en D31.
=BUSCAR(B16,C6:D11)

Con esta instrucción busca el contenido de la celda B16 en la región comprendida de la celda B6 a la celda D11

FRECUENCIA =BUSCAR(B16,C6:D11)

	A	B	C	D	
5		Probabilidad	Prob.Acum.	Venta/día	
6		0.05	0	30	
7		0.15	0.15	31	
8		0.22	0.2	32	
9		0.38	0.42	33	
10		0.14	0.8	34	
11		0.06	0.94	35	
12	Orden Incial		22		
13					
14			Cantidad	Cantidad	Ca
15	Día	No.Aleatorio	Ordenada	Vendida	a de
16	1	0.15642034	22	=BUSCAR(B	
17	2	0.415486411	31	32	
18	3	0.703369574	32	33	
19	4	0.003916123	33	30	

D16 =BUSCAR(B16,C6:D11)

	A	B	C	D	
5		Probabilidad	Prob.Acum.	Venta/día	
6		0.05	0	30	
7		0.15	0.15	31	
8		0.22	0.2	32	
9		0.38	0.42	33	
10		0.14	0.8	34	
11		0.06	0.94	35	
12	Orden Incial		22		
13					
14			Cantidad	Cantidad	Ca
15	Día	No.Aleatorio	Ordenada	Vendida	a de
16	1	0.100485047	22	30	
17	2	0.074970305	30	30	
18	3	0.494696314	30	33	
19	4	0.623822611	33	33	
20	5	0.773191087	33	33	
1011	996	0.259726764	32	32	

Ejemplo de la Función BUSCARV

Suponga que el señor Pérez compra una moto nueva de $20,000, realiza un pago inicial de $5,000, y le es financiado la cantidad restante en 36 meses a una tasa de interés anual del 8.5%. Existen al menos 2 productos que pudieran ser de interés : El pago mensual y el total de intereses pagados. Estos son afectados por al menos 2 insumos: El pago inicial y la tasa de interés anual.

Veamos primero el ejemplo de la tabla de datos en un sentido, donde vemos como un solo resultado, el pago mensual, que varía conforme la tasa de interés anual varía. Esto se muestra en la tabla siguiente.

	A	B	C	D	E
1	Precio del carro	$20,000		Tabla a Buscar	
2	Pago inicial	$5,000		Tasa de Interes	Pago Mensual
3	Cant.Financiada	$15,000			$473.51
4	Interes Anual	8.50%		8.00%	$470.05
5	Numero de pagos	36		8.25%	$471.78
6				8.50%	$473.51
7	Pago mensual	-$473.51		8.75%	$475.25
8	Interes total a pagar			9.00%	$477.00

Para crear la tabla anterior:

Entra la formula para el resultado en la celda E3. (Debido a que el pago mensual fue calculado con la función **PAGO** en la celda B7, simplemente entre =B7 en la celda E3.) Iniciando en la celda D4, entre cualquier secuencia de tasas de interés. Seleccione la tabla completa, esto es, el rango D3:E8. Finalmente, use del menú Datos/Tabla y entre B4 como la celda de insumo para la columna. (Si no hay celda de insumo. déjela en blanco.)

También se pueden capturar mas de un producto en una tabla de un sólo producto. Como ejemplo, aparece a continuación, donde un sólo insumo es todavía la tasa de interés, pero existen dos productos: pago mensual y total de intereses pagados. Esta tabla esta elaborada exactamente como antes excepto que el rango de la tabla es ahora D3:F8.

A continuación se presenta la tabla de pagos mensuales donde se varía el número de meses de 12 a 60 con incrementos de 12.

	A	B	C	D	E	F
1	Precio del carro	$20,000		Tabla a Buscar Interes		
2	Pago inicial	$5,000		Tsa de Interes	Pago Mensual	
3	Cant.Financiada	$15,000			$473.51	$2,046.47
4	Interes Anual	8.50%		8.00%	$470.05	1921.63735
5	Numero de pagos	36		8.25%	$471.78	1983.98466
6				8.50%	$473.51	2046.47021
7	Pago mensual	-$473.51		8.75%	$475.25	2109.0939
8	Interes total a pagar	-$2,046.47		9.00%	$477.00	2171.85564

	D	E
10	Tabla a Buscar Meses	
11	No. de meses	Pago Mensual
12		$473.51
13	12	1308.296737
14	24	681.8351232
15	36	473.5130614
16	48	369.7245504
17	60	307.7479699

Las tablas de dos sentidos permiten variar 2 productos, uno sobre una fila y el otro sobre una columna, y captura un solo producto en el cuerpo de la tabla. La tabla siguiente lo ilustra, donde se varía la tasa de interés anual y el pago inicial. El único producto es el pago mensual.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Precio del carro	$20,000		Tasa de Interes	Pago Mensual		
2	Pago inicial	$5,000		$473.51	$4,000	$5,000	$6,000
3	Cant.Financiada	$15,000		8.00%	$470.05	470.045482	470.045482
4	Interes Anual	8.50%		8.25%	$471.78	471.777352	471.777352
5	Numero de pagos	36		8.50%	$473.51	473.513061	473.513061
6				8.75%	$475.25	475.252608	475.252608
7	Pago mensual	-$473.51		9.00%	$477.00	476.99599	476.99599
8	Interes total a pagar						

Para crear la tabla anterior:

Entre la formula (=B7) donde un solo producto en la esquina superior izquierda (celda D2) de la tabla de datos. (Nuevamente, podemos colorear esta celda de gris para enfatizar.) Entre cualquier secuencia de pagos iniciales a la derecha de estos y cualquier secuencia de tasas de interés abajo de estos. Finalmente, seleccione la tabla completa datos tabla rango, D2:G7, use del Menú Datos/Tabla, entre B2 como la celda de insumo, y entre B4 como la celda columna de insumo.

Apendice de Tablas

Tabla de Números Aleatorios

13962	70992	65172	28053	02190	83634	66012	70305	66761	88344
43905	46941	72300	11641	43548	30455	07686	31840	03261	89139
00504	48658	38051	59408	16508	82979	92002	63606	41078	86326
61274	57238	47267	35303	29066	02140	60867	39847	50968	96719
43753	21159	16239	50595	62509	61207	86816	29902	23395	72640
83503	51662	21636	68192	84294	38754	84755	34053	94582	29215
36807	71420	35804	44862	23577	79551	42003	58684	09271	68396
19110	55680	18792	41487	16614	83053	00812	16749	45347	88199
82615	86984	93290	87971	60022	35415	20852	02909	99476	45568
05621	26584	36493	63013	68181	57702	49510	75304	38724	15712
06936	37293	55875	71213	83025	46063	74665	12178	10741	58362
84981	60458	16194	92403	80951	80068	47076	23310	74899	87929
66354	88441	96191	04794	14714	64749	43097	83976	83281	72038
49602	94109	36460	62353	00721	66980	82554	90270	12312	56299
78430	72391	96973	70437	97803	78683	04670	70667	58912	21883
33331	51803	15934	75807	46561	80188	78984	29317	27971	16440
62843	84445	56652	91797	45284	25842	96246	73504	21631	81223
19528	15445	77764	33446	41204	70067	33354	70680	66664	75486
16737	01887	50934	43306	75190	86997	56561	79018	34273	25196
99389	06685	45945	62000	76228	60645	87750	46329	46544	95665
36160	38196	77705	28891	12106	56281	86222	66116	39626	06080
05505	45420	44016	79662	92069	27628	50002	32540	19848	27319
85962	19758	92795	00458	71289	05884	37963	23322	73243	98185
28763	04900	54460	22083	89279	43492	00066	40857	86568	49336
42222	40446	82240	79159	44168	38213	46839	26598	29983	67645

43626	40039	51492	36488	70280	24218	14596	04744	89336	35630
97761	43444	95895	24102	07006	71923	04800	32062	41425	66862
49275	44270	52512	03951	21651	53867	73531	70073	45542	22831
15797	75134	39856	73527	78417	36208	59510	76913	22499	68467
04497	24853	43879	07613	26400	17180	18880	66083	02196	10638
95468	87411	30647	88711	01765	57688	60665	57636	36070	37285
01420	74218	71047	14401	74537	14820	45248	78007	65911	38583
74633	40171	97092	79137	30698	97915	36305	42613	87251	75608
46662	99688	59576	04887	02310	35508	69481	30300	94047	57096
10853	10393	03013	90372	89639	65800	88532	71789	59964	50681
68583	01032	67938	29733	71176	35699	10551	15091	52947	20134
75818	78982	24258	93051	02081	83890	66944	99856	87950	13952
16395	16837	00538	57133	89398	78205	72122	99655	25294	20941
53892	15105	40963	69267	85534	00533	27130	90420	72584	84576
66009	26869	91829	65078	89616	49016	14200	97469	88307	92282
45292	93427	92326	70206	15847	14302	60043	30530	57149	08642
34033	45008	41621	79437	98745	84455	66769	94729	17975	50963
13364	09937	00535	88122	47278	90758	23542	35273	67912	97670
03343	62593	93332	09921	25306	57483	98115	33460	55304	43572
46145	24476	62507	19530	41257	97919	02290	40357	38408	50031
37703	51658	17420	30593	39637	64220	45486	03698	80220	12139
12622	98083	17689	59677	56603	93316	79858	52548	67367	72416
56043	00251	70085	28067	78135	53000	18138	40564	77086	49557
43401	35924	28308	55140	07515	53854	23023	70268	80435	24269
18053	53460	32125	81357	26935	67234	78460	47833	20496	35645

Tomada de la Corporacón Rand, “*A Million Random Digits with 100,000 Normal Deviates”* (New York: The Free Press, 1955)

Referencias Bibliográficas:

AM Law and WD Kelton. Simulation, Modeling and Analysis. New York: McGraw-Hill, 2nd edition, 1991.

Azarang, M. R. y García Dunna, E., (1996), *Simulación y Análisis de Modelos Estocásticos* McGrawHill/Interamericana de México, S.A. de C.V., México.

Banks, J. y Carson, J.S., (1984), *Discrete event system simulation*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J..

Coss Bu Raúl, (2002), *Simulación Un enfoque práctico* , Limusa

Davis y Mc kewon, *Modelos Cuantitativos para la Administración* , Mc. Graw-Hill

D. H. Lehmer, "*Mathematical methods in large-scale computing units*," in Proc. 2nd Symposium on D.H. Lehmer. Random number generation on the BRL high-speed computing machines, by M.L. Juncosa. *Math. Rev.*, 15:559, 1954.

E. Gentle (Hardcover - July 2003) Large-Scale Digital Calculating Machinery, Cambridge, MA, 1949, pp. 141--146.

Fishman, G. S. *“Monte Carlo: Concepts, Algorithms and Applications”. Springer. 1997*

Rubinstein, Reuven Y. “*Simulation and The Monte Carlo Method”. Wiley. 1981*

Gottfried, B.S., (1984), *Elements of Stochastic Process Simulation*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J.

Gordon, G., (1989), *Simulación de Sistemas*, Editorial Diana, México

Hammersley, J. M. and D. C. Handscomb, 1964, *Monte Carlo Methods*, John Wiley & Sons, New Cork

Hillier, F.S. y Lieberman, G.J., (2003), *Introducción a la Investigación de Operaciones*.

Knuth, D. E. “The art of computer programming” vol 2, “seminumerical algorithms”, 2nd ed Addison Wesley, 1981. pp. 9-20.

Naylor, Balintfy y Burdick, *Técnicas de Simulación de computadoras*, Limusa

Paul Bratley, Bennett L. Fox, Linus E. Schrage, *A Guide to Simulation*, Second Edition, Springer-Verlag New York Inc., 1987.

Proceedings of the Second International Conference on Operations Research, pp. 50-68.

Random Number Generation and Monte Carlo Methods (Statistics and Computing) by James Ripley, B. D. (1987) *Stochastic Simulation.* Wiley

Ross, S., (1997), *Simulation*, 2a Edición, Academic Press, USA

Shdmit y Taylor, *Análisis y Simulación de Sistemas Industriales*, Trillas

Taha, H.A., (1991), *Investigación de Operaciones*, 2ª Edición, Alfaomega S.A., México.

Tocher, K.D. The Art of Simulation. English Universities Press, London, 1963.

Tocher, K.D. (1963). *The Art of Simulation,* Van Nostrand Company, Princeton, NJ.

Tocher, K.D. (1966). ``Some Techniques of Model Building,'' *Operational Research Quarterly,* 16(2), pp. 189-217, June.

Tocher, K.D. (1979). Keynote Address, In: *Proceedings of the 1979 Winter Simulation Conference,* pp. 640-654, San Diego, CA, December 3-5.

Tocher, K.D. and Owen, G.D. (1960). ``The Automatic Programming of Simulations,'' In:

Winston, *Investigación de Operaciones*, Gpo. Editorial Iberoamérica

http://www.maa.org/mathland/mathland_4_22.html

http://stat.fsu.edu/~geo/diehard.html

http://www.ing.ula.ve/~hhoeger/curso_sim.html

www.cp.eng.chula.ac.th/faculty/ cws/classes/2110301/home.htm

http://www.stat.cmu.edu/

http://random.mat.sbg.ac.at/links/monte.html

http://www.mat.usach.cl/histmat/html/ia.html

www.addlink.es/product/palisade/risk.htm

http://www.csm.ornl.gov/ssi-expo/MChist.html

http://www.ccs.uky.edu/

http://dmawww.epfl.ch/benarous/Pmmi/interactive/rng0.htm