# CAPITULO 4 GENERACION DE VARIABLES ALEATORIAS

En esta sección se trataran procedimientos para muestrear una variedad de distribuciones de probabilidad discretas y continuas ampliamente usadas. En el capítulo 1, “introducción a la simulación” se discutió y se mostraron ejemplos de sistemas diversos donde se dejo clara la importancia de las distribuciones estadísticas para modelar actividades que son generalmente impredecibles o inciertas. Por ejemplo, los tiempos entre arribo y los tiempos de servicio en las colas, y la demanda de un producto, son generalmente impredecibles por naturaleza, al menos en cierta extensión. Usualmente tales variables son modeladas como variables aleatorias con una distribución estadística, y los procedimientos estadísticos estándar existen para estimar los parámetros de la distribución hipotética y para probar la validez del modelo estadístico asumido (como son las pruebas de Ajuste de Bondad), que se cubrirá en la siguiente sección.

Se asume que una distribución ha sido completamente especificada, y se han visto procesos para generar muestras de esta distribución para ser usadas como insumo para un modelo de simulación. El propósito de esta sección es explicar e ilustrar algunas técnicas ampliamente usadas para generar variables aleatorias, y no para llevar a cabo una investigación profunda de las técnicas más eficientes. En la práctica, la mayoría de quién realiza la simulación usará las rutinas existentes en las bibliotecas disponibles en los lenguajes de programación, o en las rutinas de los lenguajes de simulación. Sin embargo, algunos lenguajes de programación no tienen rutinas internas de todas las distribuciones utilizadas. Aunque esto no es muy común, es importante entender como se lleva a cabo la generación de variables aleatorias.

En este capítulo se discuten las técnicas de transformación inversa, el método de convolución y más brevemente la técnica de aceptación-rechazo. Otra técnica el método de composición, es discutida por Fisherman [1978] y Law y Kelton [1991]. Todas las técnicas en este capítulo consideran que se conoce como fuente la uniformidad U(0,1) de los números aleatorios $R_1$,$R_2$,...., donde cada $R_i$ tiene una función de densidad de probabilidad (FDP )

$$f_R(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Y la función de densidad acumulada de probabilidad (FDA )

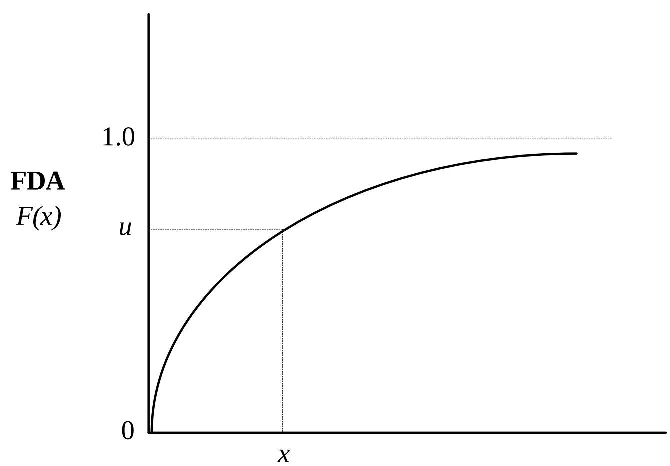
$$F_R(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

## 4.1.- Métodos de Generación de Variables Aleatorias

Hay una variedad de métodos para generar variables aleatorias. Cada método se aplica solo a un subconjunto de distribuciones y para una distribución en particular un método puede ser mas eficiente que otro.

### 4.1.1 Transformación Inversa

Si la variable aleatoria *X* tiene una FDA *F*(*x*), entonces la variable R = *F*(*x*) esta distribuida uniformemente entre 0 y 1. Por lo tanto, *X* se puede obtener generando números uniformes y calculando $x = F^{-1}$ (R).




Analíticamente, el método se representa como:

$$F(X) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad \textbf{(9)}$$

$$X = F^{-1}(R) \quad \textbf{(10)}$$

donde $f(x)$ es la función de densidad de probabilidad de la distribución deseada. Para ver porqué el $X$ generado con este método en realidad tiene la distribución deseada, tome un valor $X_0$ y calcule la probabilidad acumulada:

$$P(X \leq X_0) = P(R \leq F(X_0)) = F(X_0) \quad \textbf{(11)}$$

Puesto que $F(X_0)$ pertenece al intervalo [0,1], la segunda igualdad plantea que $R$ es un número uniformemente distribuido en dicho intervalo, y como $F(x)$ es la función de probabilidad acumulada de $X$, se concluye que esta variable tendrá la distribución deseada.

Este método nos permite generar variables aleatorias siempre que se pueda determinar $F^{-1}(x)$ analíticamente o empíricamente.

Ejemplo **(determinación analítica)**:

Sea $X$ exponencial con $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ . La FDA es $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ =R o $X = -\frac{1}{\lambda} Ln(1-R)$ .Si R es uniforme entre 0 y 1, entonces 1-R también esta distribuida uniformemente entre 0 y 1. Por lo tanto podemos generar variables aleatorias exponenciales generando R y después calculando.

$$X = -\frac{1}{\lambda} Ln(R)$$

Ejemplo **(determinación empírica)**:

El tamaño de los paquetes en una red fueron medidos y encontrados trimodales con las siguientes probabilidades:

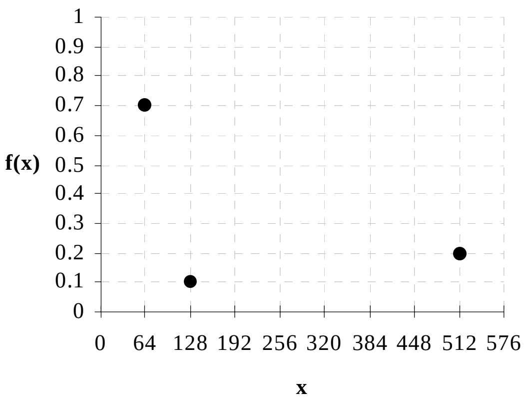
| Tamaño (bytes) | Probabilidad |
|---|---|
| 64 | 0.7 |
| 128 | 0.1 |
| 512 | 0.2 |

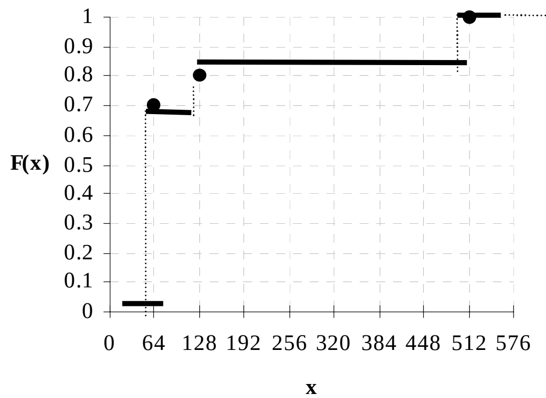
La FDA viene dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0.0 & 0 \leq x < 64 \\ 0.7 & 64 \leq x < 128 \\ 0.8 & 128 \leq x < 512 \\ 1.0 & 512 \leq x \end{cases}$$

y la inversa esta dada por:

$$F^{-1}(u)=\begin{cases}64 & 0\le u<0.7\\128 & 0.7\le u<0.8\\512 & 0.8\le u<1\end{cases}$$




### 4.1.2 Método de Aceptación-Rechazo

Esta técnica se puede usar si existe otra función de densidad *g*(*x*) tal que *cg*(*x*) *supera* la función de densidad *f*(*x*), es decir, *cg*(*x*) > *f*(*x*) para todos los valores de *x*. Si esta función existe, entonces se pueden aplicar los siguientes pasos:

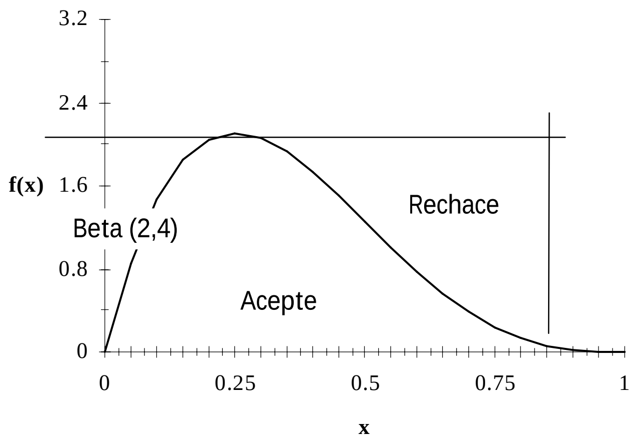
1. Genere *x* con la densidad *g*(*x*).
2. Genere *y* uniforme en [0, *cg*(*x*)].
3. Si $y \le f(x)$, devuelva *x* y retorne. De lo contrario repita desde el paso 1.

El algoritmo permanece *rechazando* las variables *x* y *y* hasta que la condición $y \le f(x)$ sea satisfecha.

Ejemplo:

Consideremos la función de densidad beta(2,4):

$$f(x) = 20x(1-x)^3 \qquad 0 \le x \le 1$$




Esta función se muestra en la figura y puede ser limitada por el rectángulo de altura 2,11. Por lo tanto podemos usar $c = 2{,}11$ y $g(x) = 1$ para $0 \leq x \leq 1$. La variables beta (2,4) pueden ser generadas como sigue:

1. Genere $x$ uniforme en [0, 1].

2. Genere $y$ uniforme en [0, 2,11].

3. Si $y \leq 20x(1-x)^3$ , devuelva $x$ y retorne. De lo contrario vuelva al paso 1.

Los pasos 1 y 2 generan un punto ($x$, $y$) distribuido uniformemente en el rectángulo en la figura. Si el punto cae sobre la densidad $f(x)$, entonces el paso 3 rechaza $x$.
La eficiencia del método depende de que tan bien $g(x)$ limita a $f(x)$. Si hay una brecha muy grande entre $cg(x)$ y $f(x)$, entonces un gran número de puntos generados en los pasos 1 y 2 serán rechazados. Similarmente, si la generación de variables aleatorias con $g(x)$ es compleja, entonces el método puede ser ineficiente.

### 4.1.3 Método de Composición

Este método se puede usar si la FDA $F(x)$ deseada se puede expresar como una suma ponderada de otras $n$ FDA $F_1(x)$, ..., $F_n(x)$:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i F_i(x) \qquad p_i \geq 0, \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

El número de funciones $n$ puede ser finito o infinito, y las $n$ FDA son compuestas para formar la FDA deseada; de aquí el nombre de la técnica. Esto también se puede ver como que la FDA deseada es descompuesta en otras $n$ FDA; por esto la técnica a veces es llamada *descomposición*.

La técnica también se puede usar si la función de densidad $f(x)$ puede ser descompuesta como una suma ponderada de otras $n$ densidades:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i f_i(x) \qquad p_i \geq 0, \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

En cualquier caso, los pasos a seguir son:

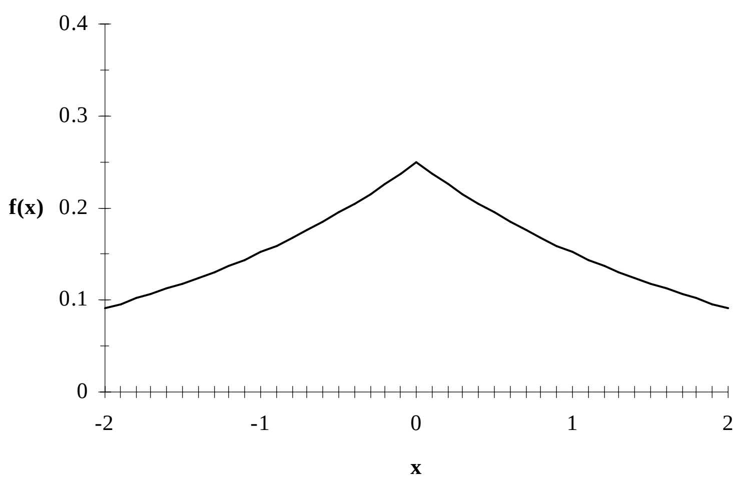
1. Genere un entero aleatorio $I$ tal que $P(I = i) = p_i$. Esto puede ser hecho con el método de transformación inversa.
2. Genere $x$ con la $i$-esima densidad $f_i(x)$ y retorne.

Ejemplo:

Consideremos la densidad de Laplace dada por

$$f(x) = \frac{1}{2a} e^{-|x|/a} \qquad -\infty < x < \infty$$

La siguiente figura muestra la densidad para $a = 2$.




Esta densidad es una composición de dos densidades exponenciales. La probabilidad de que $x$ sea positiva es 1/2, y de que sea negativa también es 1/2. Usando la técnica de composición podemos generar variables de Laplace de la siguiente forma:

1. Genere $R_1 \sim U(0,1)$, y $R_2 \sim U(0,1)$.
2. Si $R_1 < 0.5$, retorne $x = -a \ln R_2$, de lo contrario retorne $x = a \ln R_2$.

### 4.1.4 Método de Convolución

Esta técnica puede ser usada si la variable aleatoria $x$ puede ser expresada como la suma de $n$ variables aleatorias $y_1, ..., y_n$ que puedan ser generadas fácilmente:

$$x = y_1 + y_2 + ... + y_n$$

En este caso $x$ se puede generar $n$ variables aleatorias $y_1, ..., y_n$ y sumándolas. Si $x$ es la suma de dos variables aleatorias $y_1$ y $y_2$ , entonces la densidad de $x$ puede se obtenida analíticamente por la convolución de las densidades de $y_1$ y $y_2$ ; de aquí el nombre de la técnica a pesar de que la convolución no es necesaria para la generación de números aleatorios.

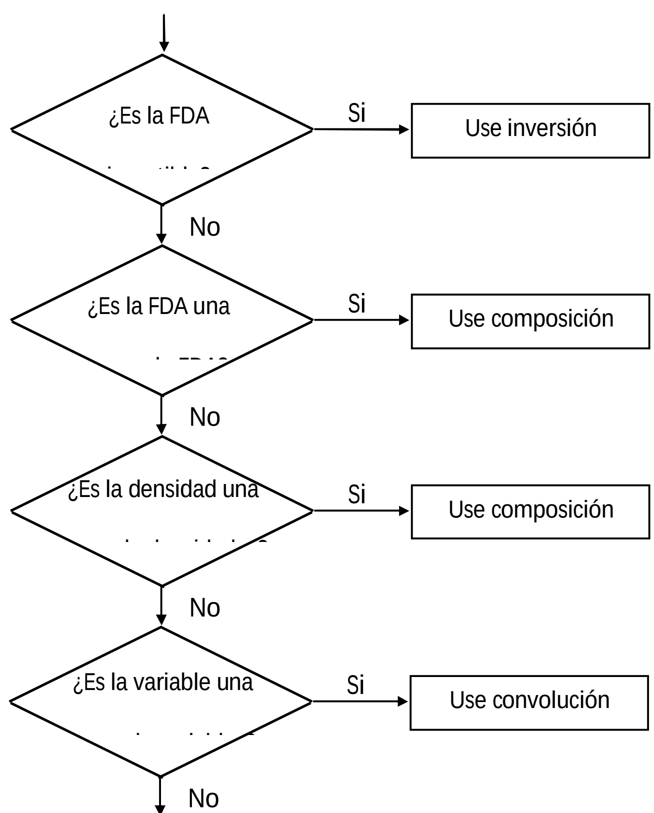
Nótese la diferencia entre composición y convolución. La primera se usa cuando la densidad o FDA puede ser expresada como la suma de otras densidades o FDA. La segunda se usa cuando la variable misma puede ser expresada como la suma de otras variables.

A continuación se dan unos ejemplos de aplicación de esta técnica:

- Una variable Erlang-$k$ es la suma de $k$ exponenciales.
- Una variable Binomial de parámetros $n$ y $p$ es la suma de $n$ variable Bernulli con probabilidad de éxito $p$.
- La chi-cuadrado con $v$ grados de libertad es la suma de cuadrados de $v$ normales $N(0,1)$.
- La suma de un gran número de variables de determinada distribución tiene una distribución normal. Este hecho es usado para generar variables normales a partir de la suma de números $U(0,1)$ adecuados.
- Una variable Pascal es la suma de $m$ geométricas.
- La suma de dos uniformes tiene una densidad triangular.

A continuación se presenta un diagrama de flujo que ayuda a decidir cual de las técnicas

anteriores se debe usar:



#### 4.1.5 Caracterización

Características especiales de ciertas distribuciones permiten generar sus variables usando algoritmos especialmente ajustados para ellas. Todos estos algoritmos están clasificados bajo una técnica llamada **caracterización**.

Ejemplos de variables generadas usando caracterización son:

- Si los tiempos entre llegadas son exponenciales con media $1/\lambda$, el número de llegadas $n$ en cierto intervalo $T$ es Poisson con parámetro $\lambda T$. Por lo tanto una Poisson puede ser obtenida generando exponenciales hasta que su suma supere $T$ y devolviendo el número de exponenciales usadas.
- El $a$-esimo menor número en una secuencia de $a + b + 1$ variables $U(0,1)$ tiene distribución beta($a$ , $b$ ).
- La razón de dos normales estándar en Cauchy(0,1).
- Una chi-cuadrado con un número par de grados de libertad $\chi^2(v)$ es un gamma $\gamma(2,v/2)$.
- Si $x_1$ y $x_2$ son dos gammas $\gamma(a , b )$ y $\gamma(a , c )$ respectivamente, la razón $x_1 / (x_1 + x_2 )$ es beta($b$,$c$).

## 4.2. Simulando Distribuciones Continuas de Probabilidad

En la simulación de procesos se emplean valores discretos para tiempo entre fallas, arribos, etc. Realmente se esta aproximando estos valores de tiempo, dado que en la práctica estos tiempos pueden tomar cualquier valor, no únicamente valores discretos. Un número de variables discretas de esta naturaleza existe en la realidad, por ejemplo; el tiempo entre llamadas recibidas; el tiempo entre el inicio del servicio y el término del mismo en una ventanilla de servicio bancario; el tiempo entre salida de aviones en un aeropuerto. Se puede usar un enfoque para simular estas ocurrencias; sin embargo en esencia, para representar variables aleatorias continuas, será necesario usar una distribución continua en el análisis.

Muchas funciones de densidad de probabilidad tienen parámetros que controlan sus características de forma y escala. Dos de las mas comunes son el parámetro α (alfa) que define la forma de la distribución y el parámetro β (beta) que describe los valores de escala de en el rango de la distribución. La media y la desviación estándar son definidas en términos de los parámetros α y β.

Una de las ventajas de emplear distribuciones continuas es que se puede desarrollar una ecuación matemática para servir como un proceso generador.

### 4.2.1 Distribución Uniforme

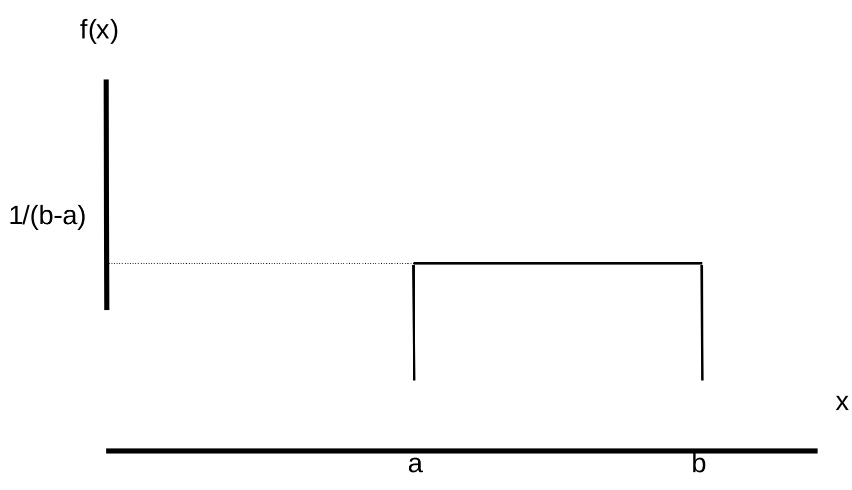
Una distribución Uniforme sobre el rango de 0 a 1 es la base para generar valores de distribuciones de probabilidad estándar. Una aplicación común es para representar el tiempo de duración de una actividad cuando se tiene una mínima información de la duración de la actividad. Algunas veces el tiempo para completar se considera que varía aleatoria y uniformemente entre dos valores. Dadas estas condiciones, la distribución Uniforme es una buena estimación preliminar para la duración de una actividad

La función de densidad de la distribución Uniforme de probabilidad es definida como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & ;para \quad a \le x \le b \\ 0 \quad para \quad cualquier \quad otro \quad caso \end{cases}$$

Media: $\dfrac{a+b}{2}$

Varianza: $(b-a)^2/12$




Distribución Uniforme de probabilidad para el intervalo (a,b)

Para obtener la distribución acumulada de probabilidad, usando la distribución original de probabilidad y a través del cálculo, así;

$$P(x) = \int_a^x p(x)dx$$

substituyendo p(x)=1/(b-a), entonces

$$F(x) = \int_a^x \frac{1}{(b-a)}dx = \frac{1}{(b-a)}\int_a^x dx = \frac{1}{(b-a)}(x-a)$$

por lo que,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ;\,para \quad x < a \\ \dfrac{X-a}{b-a} & ;\,para \quad a \le x \le b \\ 1 & ;\,para \quad x > b \end{cases}$$

<u>Usando el procedimiento de transformación inversa</u> involucra establecer una variable aleatoria uniforme R (donde R se encuentra entre cero y uno ) igual a F(x) y resolver para x. Así,

X = a + R(b - a)

**Ejemplo**

El tiempo requerido para lavar un auto esta uniformemente distribuido con un tiempo mínimo de 8 minutos y un máximo de 12 minutos. Simule el tiempo de servicio para procesar 10 automóviles. Use un proceso generador uniforme en su análisis. ¿Cuál es el tiempo promedio para los 10 autos que se procesan?

Sea x = Tiempo de servicio

Así; $F(x) = \frac{X-a}{b-a} = \frac{X-8}{12-8} = \frac{X-8}{4}$

Como x = a + R . (b-a) , entonces x = 8 + 4R

| Carro | No. Aleatorio | x |
|---|---|---|
| 1 | .4764 | 9.9056 |
| 2 | .8416 | 11.3664 |
| 3 | .9434 | 11.7736 |
| 4 | .3420 | 9.368 |
| 5 | .6827 | 10.7308 |
| 6 | .8521 | 11.4084 |
| 7 | .1129 | 8.4516 |
| 8 | .5806 | 10.3224 |
| 9 | .9285 | 11.714 |
| 10 | .6955 | 10.7820 |
| | | 105.8228 |

x =105.8228/10=105823

tiempo esperado μ=10

Tiempo promedio $\bar{x}$ =10.5823

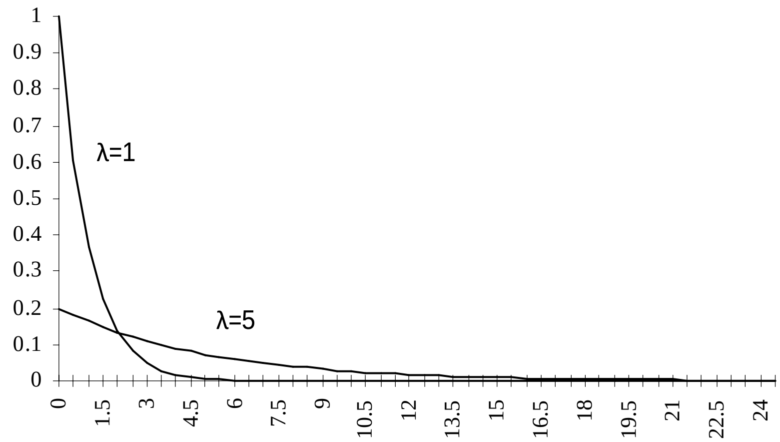
## 4.2.2 Distribución Exponencial

Es usada extensivamente en modelos de colas. Es la única distribución continua con la propiedad de pérdida de memoria: recordar el tiempo desde el último evento no ayuda a predecir el tiempo hasta el próximo evento. Es usada para modelar el tiempo entre eventos sucesivos, por ejemplo:

- El tiempo entre llegadas.
- El tiempo entre fallas.

Un proceso generador uniforme para esta distribución puede ser desarrollado con el uso de la técnica de transformación inversa. La función de densidad de la distribución Exponencial de probabilidad es la siguiente:

$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ , para 0 $\leq$ x $\leq$ ∞; 0 para x<0
Media: λ
Varianza: $\lambda^2$




donde $\lambda$ es la tasa de servicio o el número de unidades servidas por unidad de tiempo.

Para desarrollar el proceso generador, se debe encontrar primeramente la función de densidad acumulada de probabilidad:

$$F(x) = \int_0^x f(x)dx = \int_0^x \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x} \Big|_0^x = -e^{-\lambda x} + 1$$

así :

$$P(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

Ahora entrando la variable aleatoria R, igual a F(x) , y resolviendo para x

$$R = F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$e^{-\lambda x} = 1 - R$$

$$-\lambda x = 1n(1 - R)$$

entonces,

$$X = -\frac{1}{\lambda} Ln(1 - R)$$

y esta expresión puede ser reemplazada por

$$X = -\frac{1}{\lambda} Ln(R)$$

**Ejemplo 1**

El tiempo entre fallas para una operación particular de manufactura puede ser descrito por una distribución exponencial con una media de 100 horas. Simule el tiempo de 5 fallas. Use el proceso generador exponencial en su análisis.

1/100 = .01 hora

x= tiempo entre fallas

$$p(x) = .01e^{-.01x}$$

X = - (1/λ)  Ln (R)        λ =.01

X = - (1/.01)  Ln (R) = -100 Ln (R)

| **Falta** | **No. Aleatorio** | **x** |
|---|---|---|
| 1 | .4466 | 80.6 |
| 2 | .6427 | 44.2 |
| 3 | .5902 | 52.7 |
| 4 | .0318 | 344.8 |
| 5 | .5901 | 52.7 |

**Ejemplo 2**

El tiempo entre arribos de los clientes que entran a una tienda puede ser descrito por una distribución exponencial con media de 8 minutos.  Simule el arribo de 10 clientes a la tienda.  Use un proceso generador exponencial en su análisis.

60/8 =7.5 clientes/hora

como $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ para λ=7.5 clientes por hora, entonces, $f(x) = 7.5e^{-7.5x}$

x=-(1/ λ) . ln(R)

x=(-1/7.5) . ln (R) = -8 Ln (R)

| Cliente | No. Aleatorio | x |
|---|---|---|
| 1 | .6279 | .062 horas = 3.72 min. |
| 2 | .8234 | .026 horas = 1.56 min. |
| 3 | .5273 | .085 horas = 5.1 min. |
| 4 | .1820 | 2.27 horas = 13.62 min. |
| 5 | .6383 | .060 horas = 3.60 min. |
| 6 | .1471 | .256 horas = 15.36 min. |
| 7 | .3208 | .152 horas = 9.12 min. |
| 8 | .8224 | .026 horas = 1.56 min. |
| 9 | .6331 | .061 horas = 3.66 min. |
| 10 | .5482 | .080 horas = 4.80 min. |

### 4.2.3 Distribución Normal

La distribución Normal es una función de distribución de probabilidad muy popular.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, para - \infty < x < \infty; \quad \sigma > 0$$

Media: $\mu$
Varianza: $\sigma^2$

Debido a su estructura complicada, la función de la distribución Normal no tiene una representación inversa. Consecuentemente, la técnica de transformación inversa no puede ser directamente aplicada para muestrear de una distribución Normal.

El *método de convolución* para generar variables normales toma ventaja del Teorema de Limite Central, el cual asegura que la suma de n variables aleatorias idénticamente distribuidas U(0,1) e independientes Y1, Y2, .....,Yn con media n$\mu$ y varianza n$\sigma^2$ esta aproximadamente distribuida normalmente con media $\mu$ y varianza $\sigma^2$.

Si tomamos n números aleatorios para representar las anteriores variables aleatorias, entonces, debido a que los números aleatorios tienen una distribución Uniforme cuyo rango varia de 0 a 1 con $\mu$ =0.5 y $\sigma^2$ = 1/12 , la variables es definida como :

$$x = \sum_{i=1}^{n} R_i$$

esta aproximadamente distribuida normalmente con media 0.5n y varianza de n/12.

Esto sigue que la variable Z esta definida como $Z = \dfrac{x - \mu}{\sigma}$ , entonces

$$Z = \frac{\sum_{i=1}^{n} R_i - 0.5n}{(n/12)^{1/2}}$$

esta aproximadamente distribuida normalmente con media cero y varianza 1.

La aproximación en este método mejora conforme n crece. Pero entre mayor sea n, mas tiempo se requiere para generar la muestra. Un valor n que es suficientemente grande para proveer una exactitud razonable y simplificar los cálculos es 12. Esto produce la siguiente ecuación:

$$Z = \sum_{i=1}^{12} R_i - 6$$

Ahora, la variable Z puede ser usada para generar aproximadamente, variables aleatorias normales con media$\mu$ y desviación estándar $\sigma$ usando la ecuación siguiente:

$$x = \mu + (\sum_{i=1}^{12} R_i - 6)\sigma$$

Entonces, para generar cada muestra distribuida normalmente usando este método se deben generar 12 números aleatorios para ser utilizados en la ecuación anterior.

Un procedimiento más sencillo para generar variables aleatorias Normales estándar independientes partiendo de 2 números aleatorios independientes es el siguiente método directo:

El ***Método de Box-Muller*** partiendo de dos números aleatorios uniformes $R_i$ y $R_{i+1}$ calcula dos variables aleatorias Normales independientes N(μ,σ ) usando

$$X1=\left[(\sqrt{-2Ln(1-R_i)})Cos(2\pi R_{i+1})\right]\sigma+\mu \quad 12$$

$$X2=\left[(\sqrt{-2Ln(1-R_i)})Sin(2\pi R_{i+1})\right]\sigma+\mu \quad 13$$

Desarrollo:

Dado que no es posible obtener analíticamente la función inversa de la probabilidad acumulada, se recurre a métodos alternativos. Uno de los métodos más empleados considera dos variables con distribución estándar normal *Z*1 y *Z*2 (media nula y varianza igual a uno), y las expresa en coordenadas polares como sigue:

$Z_1$=β sin θ

$Z_2$=β cos θ **(14)**

Se sabe que B=$Z_1^2+Z_2^2$ tiene una distribución chi-cuadrado con grado de libertad 2, la cual es equivalente a una distribución exponencial con media 2. Entonces, el radio *B* puede ser generado con:

B=(-2ln$R_1$)$^2$. **(15)**

Debido a la simetría de la distribución normal, se supone que . está uniformemente distribuido en el intervalo [0, 2 ]. Entonces, el ángulo se genera con:

*Θ=2πR₂* **(16)**

Finalmente, los valores *Z*1 y *Z*2 con distribución normal estándar se obtienen generando *B* y θ con las ecuaciones **(15)** y **(16)** respectivamente. El valor de *X* con una distribución normal con media y varianza $^2$ se calcula con:

**X=μ+Zσ (17)**

Lo cual nos genera las ecuaciones 12 y 13

Una desventaja del ***método de Box-Muller*** es su poca eficiente en el cálculo del seno y el coseno. Este problema se puede solucionar usando el ***Método Polar*** **(** **M*arsaglia*** **)**cuyo procedimiento es el siguiente:

a) Genere dos números aleatorios $R_i$ y $R_{i+1}$ uniformemente distribuidos
b) Haga $v_1 = 2R_1-1$, $v_2=2R_2-1$, y $r=v_1^2+v_2^2$.

c) Si r >1 vaya al inciso a); de lo contrario haga $s=\left[\frac{\left(-2\ln\ r\right)}{r}\right]^{1/2}$ y retorne:

$X_1=\mu+\sigma v_1 s$

$X_2=\mu+\sigma v_2 s$

como dos N(μ,σ ) independientes

Inconveniente: Se rechazan determinadas pares de variables. La proporción de rechazo es: p = 1-π/4 = 0.2146

Otro forma de generar variables aleatorias es el ***generador de Scheimer*** que de la distribución aproximada a la normal estándar

$$Z=\frac{R^{0.135}-(1-R)^{0.135}}{0.1975}$$

donde X=μ+Zσ

Otro método para generar variables aleatorias normales es el ***Método de Rechazo de Forsythe*****,** que procede de la siguiente manera;

a) Genere dos uniformes $R_1$ y $R_2$ *U*(0,1).

b) Haga $x = -\ln R_1$.

c) Si $R_1 > e^{-\frac{(1-x)^2}{2}}$ regrese al inciso a).

d) Genere $R_2$.

e) Si $R_2 > 0.5$, retorne $X=\mu + \sigma x$; de lo contrario retorne $X=\mu - \sigma x$.

## 4.2.4 Distribución Weibull

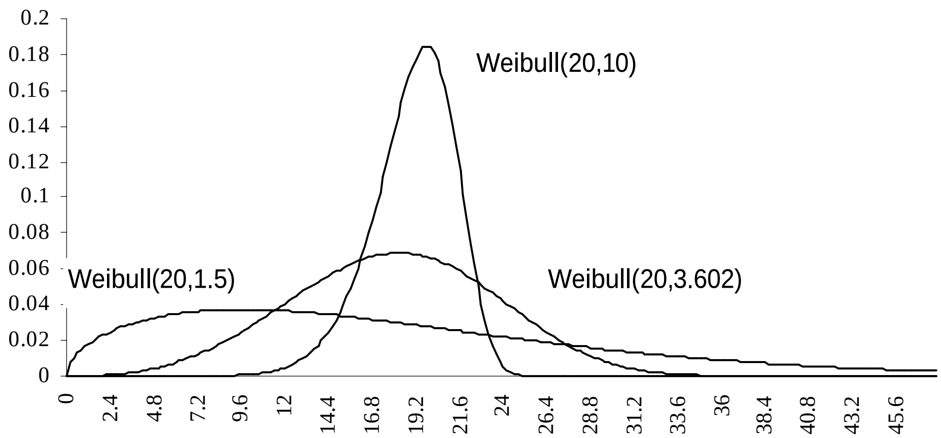
La distribución Weibull es introducida como un modelo para tiempo entre falla en maquinas o equipos, o la vida esperado de los componentes electrónicos. Es usada comúnmente en análisis de confiabilidad y se usa para modelar tiempo de vida de componentes Cuando el parámetro de ubicación $\nu$ es fijado a cero, su función de densidad de probabilidad esta dada por la ecuación siguiente:

$f(x) = \dfrac{\beta}{\alpha^{\beta}} x^{\beta-1} e^{-(\frac{x}{\alpha})^{\chi}}$ , $x \geq 0$; f(x) = 0, en cualquier otro caso

Media: $\dfrac{\alpha}{\beta} G\left(\dfrac{1}{\beta}\right)$

Varianza: $\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}\left\{2\beta G\left(\dfrac{2}{\beta}\right) - \left[G\left(\dfrac{1}{\beta}\right)\right]^2\right\}$

donde $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ son los parámetros de escala y forma de la distribución respectivamente.




Para generar una variable Weibull, siga los pasos siguientes:

Paso 1. La función de distribución continua esta dada por $F(X) = 1 - e^{-(\frac{x}{\beta})^{\beta}}, x \geq 0$

$$F(x) = \int_0^x \frac{\beta}{\alpha^{\beta}} x^{\beta-1} e^{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}} dx \quad \text{si} \quad u = \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}, \quad \text{y}$$

$$F(x) = \int_0^x e^{-u} du = -e^{-u} \big|_0^x = -e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}} + 1 \quad du = \beta\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} \frac{1}{\alpha} dx \text{ entonces ;}$$

Paso 2. Sea $F(X) = 1 - e^{-(\frac{x}{\alpha})^{\beta}} = R$

Paso 3. Resolviendo para X en términos de R produce $X = -\alpha\left[Ln(1-R)^{\frac{1}{\beta}}\right]$

Ahora entrando la variable aleatoria R, igual a F(x) , y resolviendo para x

$$1-e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}} = R \qquad 1-R = e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}} \qquad Ln(1-R) = -\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta} \qquad \left[Ln\left(1-R\right)\right]^{\frac{1}{\beta}} = -\frac{x}{\alpha}$$

$x = -\alpha\left(Ln\left(1-R\right)\right)^{\frac{1}{\beta}}$ lo que hace valido que $x = -\alpha\left(Ln\left(R\right)\right)^{\frac{1}{\beta}}$ Weibull(α,β)

### 4.2.5 Distribución Erlang

Una variable aleatoria con distribución Erlang puede ser generada sobre la base del método proveído para muestreo de la distribución Exponencial. Es generalmente usada en modelos de cola como una extensión de la exponencial cuando el coeficiente de variación (razón entre la desviación estándar y la media) es menor que 1, por ejemplo:

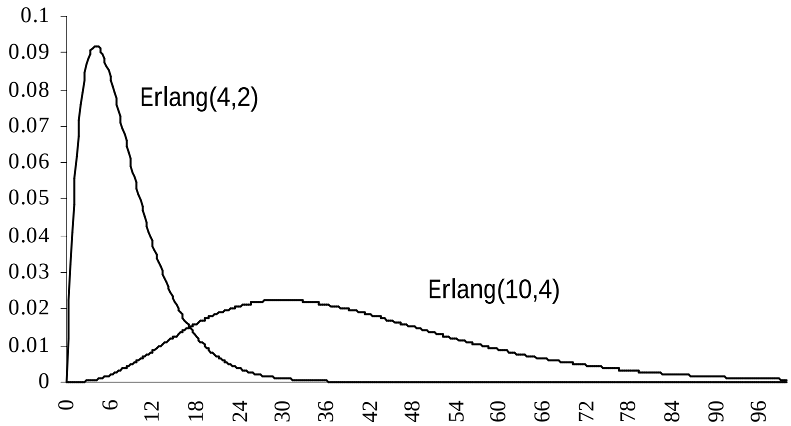
- Modelar tiempos de servicio: un taquilla con tiempo de servicios ~ Erlang(λ , *m* ) puede ser representada como *m* taquillas con tiempos de servicio exponenciales.
- Modelar el tiempo de reparación y el tiempo entre fallas.

---

$$f(x) = \frac{x^{m-1}e^{-\frac{x}{\lambda}}}{(m-1)!\lambda^{m}} \qquad ;\, para \quad 0 \le x < \infty, \quad \lambda > 0, \quad m \quad entero$$

Media: λ*m*
Varianza: $\lambda^2 m$

---




$$F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\lambda}} \left[ \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\left(\frac{x}{\lambda}\right)^i}{i!} \right]$$

Por definición, una distribución m-Erlang con parámetro λ es el resultado de la sumatoria (*Técnica de convolución*) de m idénticas distribuciones Exponenciales cada una con parámetro λ.

Por esto, dada la distribución Exponencial para cada variable xi,

$$f(x_i) = \lambda_i e^{-\lambda_i x}$$

La variable aleatoria Erlang Y es definida como

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots\ldots + X_m$$

Se tiene de demostraciones anteriores que

$$X_i = (-1/\lambda)\ 1n\ R_i \quad \text{para } i = 1,2,3\ldots.\ m$$

de esto se tiene que

$$Y = (-1/\lambda)(\ 1n\ R_1 + 1nR_2 + \ldots.. + 1n\ R_m\ )$$

o

$$Y = (-1/\lambda)\ 1n(R_1 * R_2 * \ldots * R_m)$$

### 4.2.6 Distribución Gamma

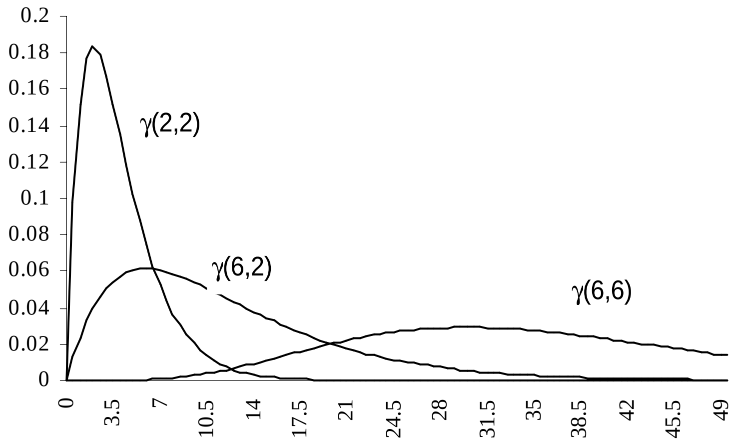
La distribución Gamma puede ser usada para representar el tiempo requerido para completar una actividad o grupo de actividades. La distribución Gamma pude ser utilizada para generar valores que representan el tiempo total requerido para completar *n* desempeños independientes de la actividad. Es una generalización de la Erlang y tiene parámetros no enteros. Se usa en modelos de colas para modelar tiempos de servicio y tiempos de reparación. El parámetro β es llamado parámetro de forma y θ es llamado parámetro de escala.

$$f(x) = \frac{\beta\theta}{\Gamma(\beta)}(\beta\theta x)^{\beta-1} e^{-\beta\theta x}, \quad x > 0$$

$$E(x) = \frac{1}{\theta}, \qquad V(x) = \frac{1}{\beta\theta^2}$$

Varias técnicas de aceptación-rechazo para generar variables aleatorias Gamma han sido desarrolladas, Fox y Scharge [1978]; Fishman, 1978; Law y Kelton [1991]. Uno de los mas eficientes es dado por Cheng [1977]; el número promedio de pruebas esta entre 1.13 y 1.47 para cualquier valor del parámetro de forma β≥1

Si el parámetro de forma β = k, una posibilidad es usar la *técnica de Convolución* (Como se hizo en la Distribución Erlang). Debido a que la distribución Erlang es un caso especial de una distribución Gamma más generalizada. Por otro lado, la técnica de aceptación-rechazo descrita aquí será un método altamente eficiente para la distribución Erlang especialmente si β = k es grande. La rutina genera variables aleatorias Gamma con parámetro de escala θ y un parámetro de forma β, esto es, con media $\frac{1}{\theta}$ y varianza $\frac{1}{\beta\theta^2}$.




Los pasos a seguir son los siguientes:

**Paso 1.** Calcule $a = (2\,\beta\text{-}1)^{1/2}$, $b = 2\,\beta\text{-Ln}4 + 1/a$

**Paso 2.** Genere $R_1$ y $R_2$.

**Paso 3.** Calcule $X = \beta[R_1/(1\text{-}R_1)]^a$

**Paso 4a.** Si $X > b\text{- Ln}(R_1^2R_2)$, rechace X y regrese al paso 2.

**Paso 4b**. Si $X \leq \text{Ln}(R_1^2R_2)$ use X como la variable buscada. Las variables generadas en el paso 4b tendrán media y varianza ambas igual a β. Si se desea tener con media $\frac{1}{\theta}$ y varianza $\frac{1}{\beta\theta^2}$ , entonces incluya

**Paso 5.** Remplace X por $X/\beta\theta^2$.

La idea básica de todos los métodos de aceptación-rechazo es nuevamente ilustrar aquí, pero la prueba de esto no es la intención de este libro. En el paso 3, $X = \beta[R_1/(1\text{-}R_1)]^a$ no esta distribuida en forma Gamma, pero el rechazo de cierto valores de X en el paso 4ª garantiza que los valores aceptados en el paso 4b tienen una distribución Gamma.

**Ejemplo**

Los tiempos muertos de una máquina de de gran producción de dulces se han determinado tener una distribución gamma con media de 2.2 minutos y una varianza de 2.1 minutos. Por lo que $1/\theta=2.2$ y $1/\beta\theta^2=2.10$, la cual implica que $\beta=2.30$ y $\theta=0.4545$.

**Paso 1**. a=1.90, b=3.74

**Paso 2.** Genere $R_1$=0.832, $R_2$=0.021.

**Paso 3.** Calcule $X=2.3(0.832/0.168)^{1.9}=48.1$

**Paso 4.** $X=48.1 > 3.74-Ln[(0.832)^2\ 0.021]=7.97$, por lo que se rechaza X y se regresa al paso 2.

Paso 2. Genere $R_1$=0.434 y $R_2$=0.716.

Paso 3. Calcule $X=2.3(0.434/0.566)^{1.9}=1.389$

**Paso 4.** Debido a que $X01.389 \leq 3.74 – Ln[(0.434)^2\ 0.716]=5.74$, se acepta X.

**Paso 5.** Divida X entre βθ=1-045 para obtener X=1.329.

Este ejemplo tomo 2 pruebas para generar una variable aleatoria distribuida Gamma, pero en promedio para generar una 1000 variables Gamma, el método requerirá entre 1130 y 470 pruebas, o en forma equivalente, entre 2260 y 2940 números aleatorios.

### 4.2.7 Distribución Beta

Dos parámetros son necesarios para definir una distribución Beta ***a*** y ***b***. Variando estos valores se produce una variedad de forma de la distribución. Los valores generados de esta distribución tendrán un rango entre 0 y 1. Por esta razón, es particularmente útil para representar fenómenos relacionados con proporciones. La proporción de artículos defectuosos encontrados en un lote determinado puede ser descrita por esta distribución. La distribución Beta también puede ser usada el tiempo para completar una actividad, cuando se tiene poca o nada de información disponible sobre la duración de una actividad.

Se usa para representar variables que están acotadas, por ejemplo, entre 0 y 1. El rango de la variable puede ser cambiado por otro rango $[x_{min}, x_{max}]$ sustituyendo $x$ en la ecuación siguiente por $(x - x_{min}) / (x_{max} - x_{min})$.

Se usa para modelar:

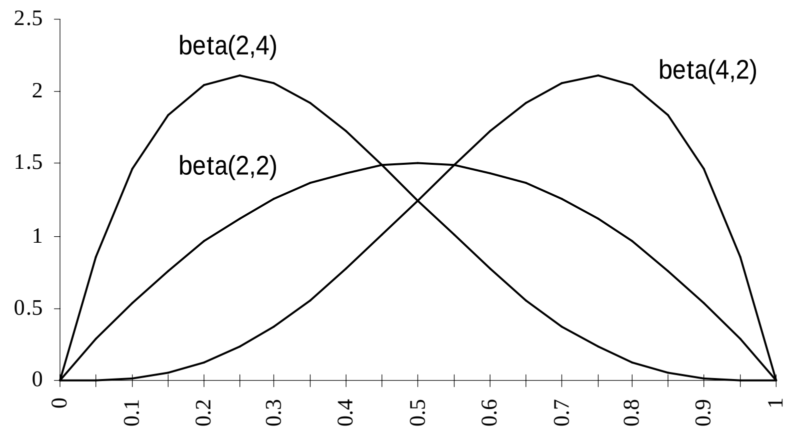
- La fracción de paquetes que requieren retransmisión
- La fracción de llamadas a procedimientos remotos que tardan mas de determinado tiempo.

$$f(x) = \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{\beta(a,b)} \qquad 0 \le x \le 1,\ a > 0,\ b > 0$$

$$\beta(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

Media: $a/(a+b)$

Varianza: $ab/[(a+b)^2(a+b+1)]$




Generación:

1. Genere dos gamas y tome la razón:

$$\text{beta}(a,b) = \frac{\gamma(1,a)}{\gamma(1,a)+\gamma(1,b)}$$

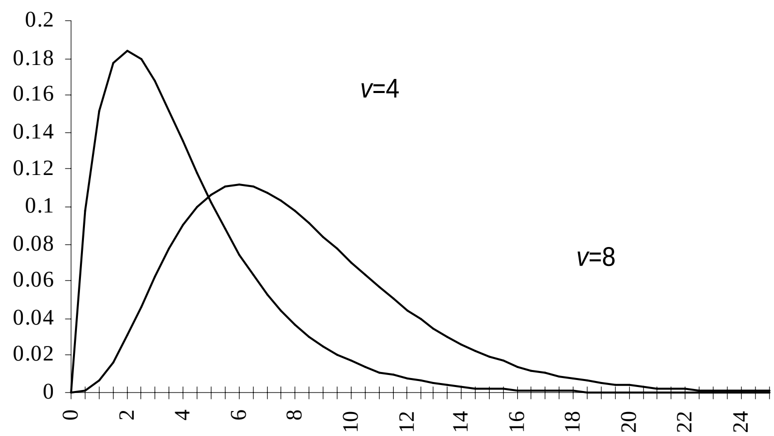
2. Si *a* y *b* son enteros:
   - Genere *a* + *b* + 1 números uniformes *U*(0,1).
   - Retorne el *a*-esimo menor número como beta(*a* , *b*).
3. Si *a* y *b* son ambos menores que 1:
   - § Genere $u_1$ y $u_2$ ambos *U*(0,1).
   - § Haga $X = R_1^{\frac{1}{a}}$ y $\gamma = R_2^{\frac{1}{b}}$. Si *x* + *y* > 1 vaya al paso previo, de lo contrario retorne *x*/(*x* + *y*) como el valor de beta(*a*, *b*).
4. Si *a* y *b* son ambos mayores que 1, un algoritmo basado en el método del rechazo puede ser fácilmente implementado.

### 4.2.8 Distribución Chi-cuadrada

Se usa cuando tenemos una suma de cuadrados de normales estándar, por ejemplo, para modelar varianzas muéstrales.

$$f(x) = \frac{x^{(v-2)/2} e^{-x/2}}{2^{v/2}\Gamma(v/2)} \qquad 0 \le x < \infty$$

$$\Gamma(b) = \int_0^\infty e^{-x} x^{b-1} dx, \quad \Gamma(b+1) = b\Gamma(b), \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(b+1) = b! \text{ si } b = 0,1,2,\ldots$$




Generación:

1. El siguiente método se basa en el hecho de que la $\chi^2(v)$ es una $\gamma(2, v/2)$.
   - Para $v$ par:
   - $$\chi^2(v) = -\frac{1}{2}\ln\left(\prod_{i=1}^{v/2} u_i\right)$$
   - Para $v$ impar:
   - $$\chi^2(v) = \chi^2(v-1) + [N(0,1)]^2$$
2. Genere $v$ $N(0,1)$ y retorne la suma de sus cuadrados.

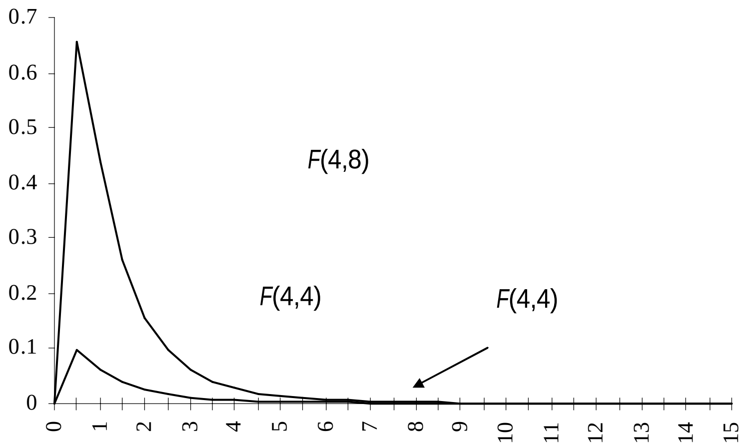
### 4.2.9 Distribución F

La *F* es la razón entre dos chi-cuadradas. Se usa para modelar la razón entre varianzas muéstrales como por ejemplo en la prueba-*F* en regresión y análisis de varianza.

$$f(x) = \frac{(n/m)^{n/2}}{\beta(n/2, m/2)} x^{(n-2)/2} \left(1 + \frac{n}{m}x\right)^{-(n+m)/2} \qquad 0 \le x < \infty, \quad n \text{ y } m \text{ enteros positivos.}$$

Media: $\dfrac{m}{m-2}$ y $m > 2$

Varianza: $\dfrac{2m^2(n+m-2)}{n(m-2)^2(m-4)}$ y $m > 4$




Generación:

Por caracterizaron. Genere dos chi-cuadrados $\chi^2(n)$ y $\chi^2(m)$ y calcule:

$$F(n,m) = \frac{\chi^2(n)/n}{\chi^2(m)/m}$$

### 4.2.10 Distribución Lognormal

Una distribución Normal puede ser usada para representar el tiempo para realizar una actividad. Un ejemplo puede ser el tiempo de ciclo para completar la operación de un carrusel de almacenaje y recuperación de un sistema automatizado de almacenaje.

Es el logaritmo de una normal. Se usa frecuentemente en modelos de regresión y análisis de experimentos donde se aplican transformaciones logarítmicas.

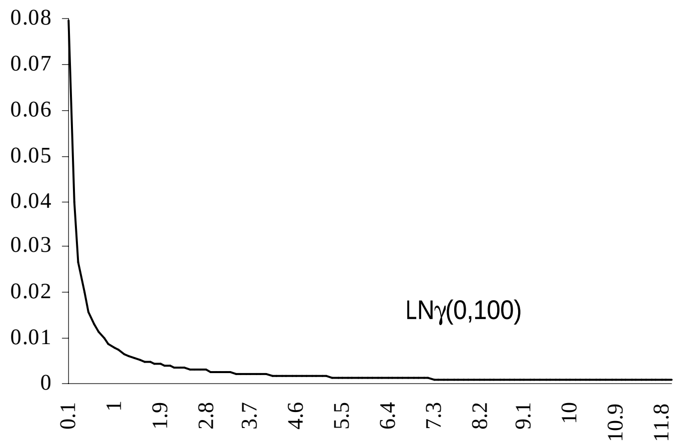
El producto de un gran número de variables aleatorias positivas tiende a la lognormal. Por lo tanto, también se usa para modelar errores que son el producto de efectos de un gran número de factores.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}} e^{-(\ln x-\mu)^2/2\sigma^2} \qquad 0 < x < \infty, \quad \mu \text{ y } \sigma > 0.$$

$\mu$ y $\sigma$ son la media y la desviacion de $\log(x)$ y NO de $x$.

Media: $e^{\mu+\sigma^2/2}$

Varianza: $e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1)$




Generación:

Genere $x \sim N(0,1)$ y retorne $e^{\mu+\sigma x}$.

## 4.2.11 Distribución Pareto

Es útil para ajustar observaciones a una distribución. Dada una muestra de tamaño $n$ $\{x_1, ..., x_n\}$, el estimador máximo verosímil del parámetro $a$ es:

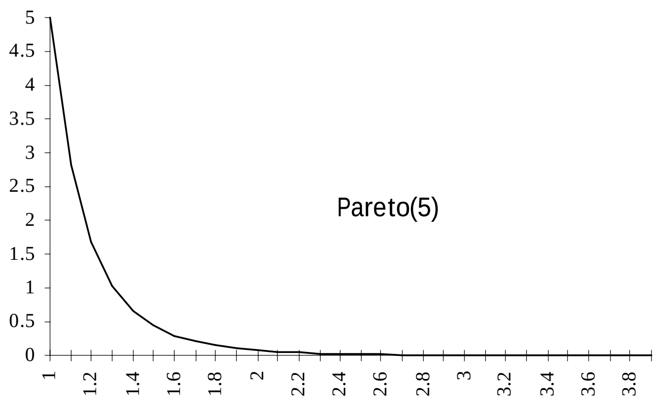
$$a = \frac{1}{\left(1/n\right)\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}$$

$$f(x) = ax^{-(a+1)} \qquad 1 \le x < \infty, \qquad a > 0$$

$$F(x) = 1 - x^{-a}$$

Media: $\frac{a}{a-1}$, para $a > 1$

Varianza: $\dfrac{a}{(a-1)^2(a-2)}$, para $a > 2$




Generación:

Por transformación inversa: Genere $u$ ~ $U(0,1)$ y retorne $1/u^{1/a}$ .

### 4.2.12 Distribución T Student

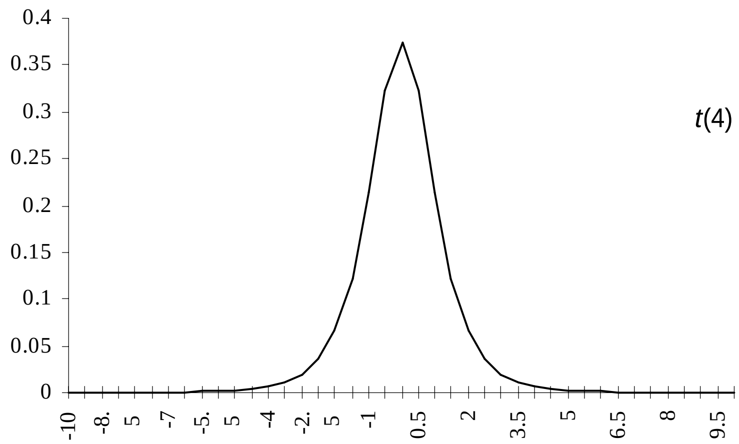
Se aplica cundo se tenga la razón entre una normal y la raíz de una $\chi^2$ y comúnmente se usa en el calculo de intervalos de confianza. Si $x \sim N(0,1)$ y $y \sim \chi^2(v)$, entonces $\dfrac{x}{\sqrt{\frac{y}{\nu}}}$ tiene distribución $t$ con $v$ grados de libertad.

$$\frac{N(0,1)}{\sqrt{\chi^2(v)/v}} \sim t(v)$$

La $f(x)$ de la $t$ es muy similar a la de la normal estándar: tiene forma de campana y es simétrica respecto a cero. Para grados de libertad grandes ($v$>30), la $t$ se puede aproximar por la normal estándar.

$$f(x) = \frac{\Gamma[(v+1)/2]\left[1+(x^2/v)\right]^{-(v+1)/2}}{(\pi v)^{1/2}\Gamma(v/2)}, \quad -\infty < x < \infty, \quad v \text{ entero positivo.}$$

| | |
|---|---|
| Varianza: $v/(v\text{-}2)$, | para $v > 2$. |




Generación:

Por caracterizaron. Genere $x \sim N(0,1)$, $y \sim \chi^2(v)$, y retorne $\dfrac{x}{\sqrt{\dfrac{y}{\nu}}}$ como $t(v)$.

## 4.3.- Simulando Distribuciones Discretas de Probabilidad

Existe un número de distribuciones discretas teóricas de probabilidad; las distribuciones discretas mas frecuentemente usadas en la simulación de modelos son la Bernoulli, Binomial, Poisson, Geométrica, Pascal y Uniforme discreta. Por lo tanto limitaremos nuestro análisis a estas distribuciones.

El proceso generador puede ser desarrollado para distribuciones discretas de probabilidad usando el método de transformación inversa. Pero un enfoque simple es utilizar un proceso de conteo conocido como el método de composición.

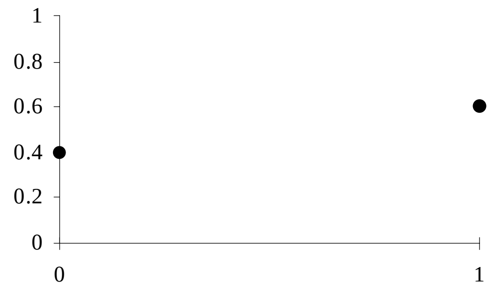
### 4.3.1 Distribución Bernoulli

Esta es la más simple de las distribuciones discretas. Toma solo dos valores que se denotan como fracaso ($x$ = 0) o éxito ($x$ = 1), con probabilidades 1-$p$ y $p$ respectivamente.

Se usa para modelar la probabilidad de que un resultado sea de una clase específica o tenga una característica específica.

- Un sistema de computación esta funcionando o no.
- Un paquete en una red llego a su destino o no.

Esta distribución junto con sus derivadas, se puede usar solo si los ensayos son independientes e idénticamente distribuidos de forma tal que la probabilidad de éxito en cada ensayo sea *p* y no sea afectada por el resultado en ensayos anteriores.




$$f(x) = \begin{cases} 1-p & \text{si } x = 0 \\ p & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Bernoulli(0.6)

Generación:

Use transformación inversa. Genere R ~ U(0,1). Si R ≤ *p* retorne 1, de otra forma retorne 0.

### 4.3.2 Distribución Binomial

La función de masa de probabilidad, que es e modelo matemático para la distribución Binomial, se expresa como sigue:

$$p(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

Media: *np*

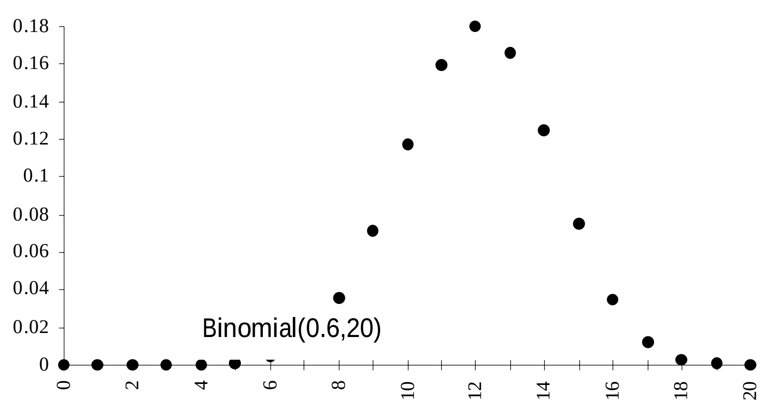
Varianza: *np*(1-*p*)

Donde,

n= es el número de pruebas independientes

p= es la probabilidad de éxito en cualquier prueba

x= es la variable aleatoria que representa el número de éxitos en n pruebas.



Dados los parámetros n y p, el proceso generador Binomial simplemente implica muestrear n veces y calcular el número x de éxitos. En cada prueba una variable aleatoria uniforme R es generada y comparada con la probabilidad de éxito p. Si R es menor que (<) p , la prueba es considerada un éxito y contabilizada ; si es mayor que ($\geq$) que p, la prueba es considerada una falla. Después de n pruebas el número de éxitos es el valor de la variable aleatoria Binominal.

### 4.3.3 Distribución Poisson

Se usa extensivamente en modelos de colas para modelar el número de llegadas en cierto intervalo:

- Número de consultas a un servidor en un intervalo *t*.
- Número de fallas en componentes por unidad de tiempo.
- Número de consultas a una base de datos en *t* segundos.
- Número de errores de tecleo por forma.

Si los datos son obtenidos en la forma d el número de arribos por unidad de tiempo, entonces los datos pueden ser descritos por una distribución Poisson.

La función de masa de probabilidad para la distribución Poisson se define como sigue:

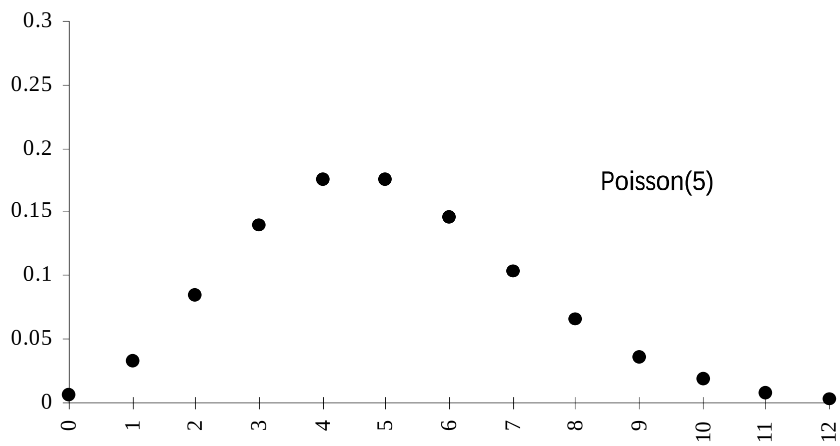
$$p(x) = \frac{(\lambda T)^x e^{-\lambda T}}{x!} \quad , \text{ para } 0 \leq x \leq \alpha$$

Media: $\lambda$.
Varianza: $\lambda$.

donde,

$\lambda$ T= al número de arribos por período de tiempo T

x =al número de arribos en el intervalo de tiempo




Si el número de arribos por período de tiempo puede ser descrito por la distribución Poisson, entonces el tiempo entre arribos puede ser descrito por la distribución exponencial.

Utilizando esta relación se simula el tiempo de arribo utilizando el proceso generador exponencial y se cuenta el número de arribos que ocurren en el período de tiempo (T).

El método de composición para generar variables aleatoria Poisson es el siguiente:

Paso 1 Identifique la longitud del período T. Inicialice a cero "el contador de arribos", n y "el contador de intervalo de tiempo" t.

Paso 2 Genere el intervalo de tiempo para un arribo utilizando el generador de proceso exponencial.

Paso 3 Sume el tiempo entre arribos en el paso 2 a t; sume 1 al contador de número de arribo n.

Paso 4 si t>T en el paso 3, entonces deseche el ultimo arribo y reste 1 del contador de número de arribos, n, y vaya a el paso 5 de otra forma vaya al paso 2.

Paso 5 El valor de n es la variable aleatoria para la distribución Poisson.

**Problema**

El número de clientes que llegan a un banco está descrita por una distribución poisson con una media de 4 arribos cada ½ hora. Simule el arribo de los clientes sobre un período de 1 hora. (Recordar la relación reciproca entre el tiempo entre arribos (dist. Exponencial) y el No. de arribos por período de tiempo (Dist. Poisson)).

$\lambda$ = 4 / ½ horas = 8/hora; por lo que el tiempo entre arribos = 7.5 min.

x = - (1/λ ) Ln (R)

| n | R | Tiempo entre arribos | Tiempo transcurrido |
|---|---|---|---|
| 1 | .5582 | .0729 | .0729 |
| 2 | .4459 | 0876 | .1605 |
| 3 | .1824 | .2126 | .3731 |
| 4 | .7041 | .0439 | .4170 |
| 5 | .3555 | .1293 | .5463 |
| 6 | .9717 | .0036 | .5499 |
| 7 | .5571 | .0731 | .6230 |
| 8 | .4674 | .0951 | .7181 |
| 9 | .8461 | .0209 | .7390 |
| 10 | .1838 | .2117 | .9507 |
| 11 | .1834 | .2120 | **1.1627** |

10 arribos/ hora

tiempo de entre arribo = 6 min.

Cuando λ ≥ 15, la técnica de aceptación-rechazo se convierte en algo caro ( por la cantidad de cálculos que se realizan ), pero afortunadamente se usa una técnica para aproximar basada en la distribución Normal que trabaja bastante bien. Cuando λ , es grande,

$$Z = \frac{N - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$$

Tiene una distribución aproximadamente Normal con media cero y varianza 1, lo cuál sugiere ser una técnica de aproximación. Primero genere una variable Normal estándar Z, usando la ecuación

$$\left[ (\sqrt{-2Ln(R_i)})Sin(2\pi R_{i+1}) \right] \text{ o } \left[ (\sqrt{-2Ln(R_i)})Cos(2\pi R_{i+1}) \right]$$

(Usadas en la generación de variables aleatorias Normales $12 y 13$)

entonces genere la variable Poisson requerida, N , usando

$$N=\lambda+\sqrt{\lambda}Z-0.5 \quad \textbf{20}$$

donde 0.5 es una función de redondeo ( Si $\lambda+\sqrt{\lambda}Z-0.5 < 0$, entonces N=0 ) el término “0.5” usado en la formula hace que la función de redondeo se convierta en una función de redondeo cercana al entero más próximo. La ecuación 36 no es una técnica de aceptación-rechazo, pero puede ser usada como una alternativa de este método, que provee un método algo eficiente para generar variables Poisson con media grande.

### 4.3.4 Distribución Geométrica

El número de ensayos hasta e incluyendo el primer éxito en una secuencia Bernoulli es una Geométrica. Es la equivalente discreta de la exponencial en cuanto a la propiedad de pérdida de memoria: recordar el pasado no ayuda a predecir el futuro.

$p(x) = p(1-p)^x, \quad x = 0,1,2,....$

Media: 1/*p*

Varianza: $\dfrac{1-p}{p^2}$

donde 0<p<1, representa el número de fracasos hasta que se produce el primer éxito en un experimento de Bernouilli de parámetro p.

Su función de Densidad Acumulada FDA esta dada por $F(x)=1-(1-p)^x, \quad x=0,1,2,...$

La variable geométrica se puede relacionar fácilmente con la variables exponencial:

Sea. $Y=\exp(\lambda),\ F_Y(y)=1-e^{-\lambda y},\ y\geq 0$

Sea x>0, entonces $P(x<Y\leq x+1)=F_Y(x+1)-F_Y(x)=1-e^{-\lambda(x+1)}-(1-e^{-\lambda x})$

$$= -e^{-\lambda X-\lambda} + e^{-\lambda x} = (e^{-\lambda})^{x}\left(1-e^{-\lambda}\right)$$

Como $e^{-\lambda} \in (0,1)$, tomemos λ tal que $1-e^{-\lambda} = p$ para conseguir la expresión de probabilidad puntual de una distribución G(p). Basta tomar λ = -Ln(1-p). Después se toma un valor y según una $Exp[-Ln(1-p)]$ y se toma x=[y]. Ya se vio que para ello hay que hacer $y = -\frac{LnR}{-Ln(1-p)}$, con R≡ U(0,1), por lo que se concluye que $x = \frac{LnR}{Ln(1-p)}$

Donde [x] denota el menor entero mayor o igual a x.

**Problema**

Genere tres valores para una distribución Geométrica en el rango (X≥1) con media 2. La media es 1/p por lo que p=2. Calculando $\frac{1}{Ln(1-p)} = -1.443$ y usando los números aleatorios 0.932, 0.105, y 0.687, tenemos

$X_1$=-1.443Ln(0.932) = 0.10169

$X_2$=-1.443Ln(0.105) = 3.2522

$X_3$=-1.443Ln(0.687) = 0.541732

Como X denota el menor entero mayor o igual a x, entonces

$X_1$=1 $X_2$=4 y $X_3$=1

### 4.3.5 Distribución Pascal

Es una extensión de la geométrica. En una secuencia de ensayos Bernoulli, el número de ensayos hasta e incluyendo el *m*-esimo éxito tiene distribución de Pascal.

Es útil para modelar el número de intentos para obtener cierto número de éxitos:

- Número de intentos para transmitir un mensaje de *m* paquetes.
- Número de bits a enviar para recibir exitosamente una señal de *m* bits.

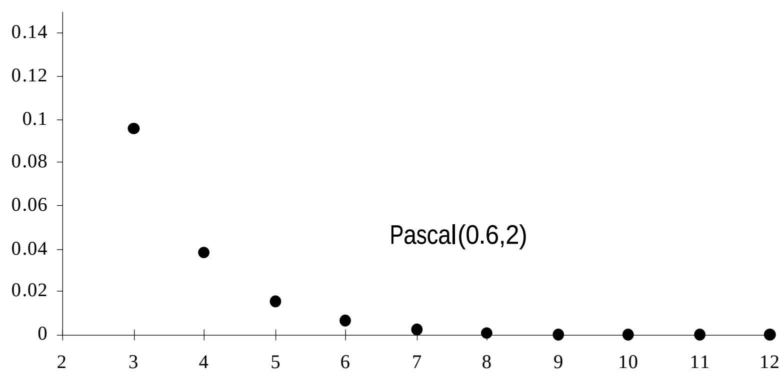
---

$$f(x) = \binom{x-1}{m-1} p^m (1-p)^{x-m}, \quad x = m, m+1, \ldots, \infty; \quad 0 < p < 1; \quad m \text{ entero positivo.}$$

Media: $m/p$.

Varianza: $m(1-p)/p^2$.

---




Generación:

Genere *m* geométricas *G*(*p*) y retorne la suma como una Pascal(*p* , *m* ).

## 4. 3.6 Distribución Uniforme (discreta)

Toma un número finito de valores, todos con la misma probabilidad. Se usa cuando se cree que los valores sobre un intervalo son equiprobables:

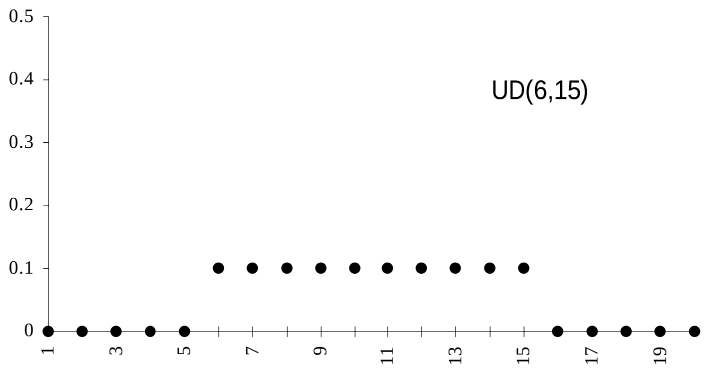
- Número de pistas a acceder en un disco.
- El número del dispositivo de entrada/salida seleccionado para la próxima operación.
- El nodo de origen y destino del próximo paquete en una red.

$$f(x) = \frac{1}{n-m+1}, \quad x = m, m+1, \ldots, n; \quad m \text{ y } n \text{ enteros y } n > m.$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < m \\ \dfrac{x-m+1}{n-m+1} & \text{si } m \le x < n \\ 1 & \text{si } n \le x \end{cases}$$

Media: ($n$ + $m$)/2

Varianza: $\dfrac{(n-m+1)^2 - 1}{12}$




Generación:

Genere R ~ $U$(0,1) y retorne [$m$ + ($n$ - $m$ + 1)$u$].

## 4.4. Distribuciones Empíricas Continuas

Si el modelador no ha sido capaz de encontrar una distribución teórica que provea un buen modelo para el suministro de datos, puede ser necesario usar la distribución empírica de los datos. El método de transformación inversa puede ser aplicado en tales situaciones, dado que la función de la distribución de probabilidad es conocida

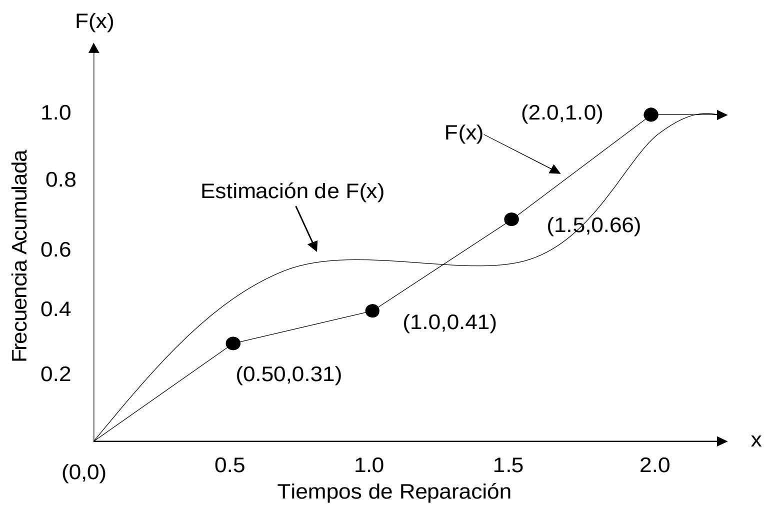
**Ejemplo 1**
Suponga que se conocen los tiempos de reparación de piezas quebradas. Los datos se muestran a continuación:

| Intervalo (horas) | Frecuencia | Frecuencia Relativa | Frecuencia Acumulada |
|---|---|---|---|

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0≤x≤0.5 | 31 | 0.31 | 0.31 |
| 0.5<x≤1.0 | 10 | 0.10 | 0.41 |
| 1.0<x≤1.5 | 25 | 0.25 | 0.66 |
| 1.5<x≤2.0 | 34 | 0.34 | 1.00 |

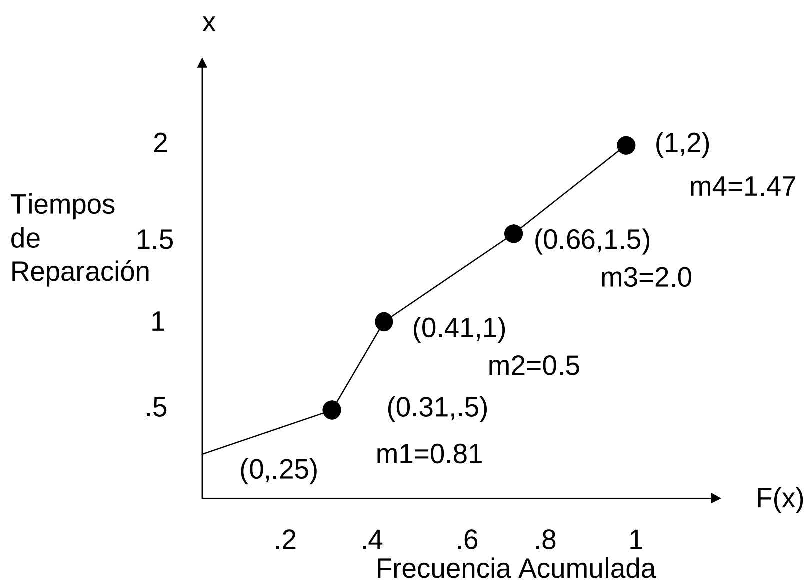
Por ejemplo. Hay 31 observaciones entre 0 y 0.5 de hora, 10 entre 0.5 y 1 hora, y así sucesivamente.

La verdadera distribución acumulada, de F(x), de los tiempos de reparación ( la línea curva de la figura siguiente) puede ser estimada tomando como base la FDP ( F(x) estimada )



La forma verdadera de F(x) es desconocida y será en la práctica siempre desconocida, a menos que se tenga disponible una cantidad enrome de datos.

Para poder generar variables aleatorias que se tengan el comportamiento de esta distribución empírica es necesario encontrar las ecuaciones de cada tramo de recta en la gráfica. Por lo que primero obtenemos la pendiente de cada recta como se muestra en la figura siguiente




Por ejemplo si tomamos el segundo tramo de recta y sean $P_1(0.31,0.5)$ y $P_2(0.41,1)$, entonces la pendiente $m_2$ se calcula como

Una vez conocida la $m_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-0.5}{.41-.31} = 0.5$ pendiente podemos obtener la ecuación de la recta con la expresión

$$m_2 = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

$$0.5 = \frac{y - 0.5}{x - 0.31} \quad ; \quad 0.5(x-0.31) = y - 0.5$$

Y entonces obtener la ecuación de su recta

Resolviendo para y, tenemos que y = 0.50+0.50(x-0.31).

Haciendo lo mismo para los otros tramos de recta, tenemos;

$$y = \begin{cases} tramo\ 1 & 0.25+.81x \\ tramo\ 2 & 0.50+0.5(x-.31) \\ tramo\ 3 & 1+2(x-0.41) \\ tramo\ 4 & 1.5+1.47(x-0.66) \end{cases}$$

Se aplica la técnica de transformación inversa directamente para generar los tiempos de reparación de la rotura X, haciendo que R (numero pseudoaleatorio) tome el lugar de x (dado que el eje x representa a F(x) y F(x)=R), y X el lugar de y en la formula obtenida para el tramo de recta 2, tenemos que;

$$X = 0.50+0.5(R-0.31)$$

Haciendo lo mismo para todos los tramos de recta, se obtiene la expresión para generar la variable aleatoria X

$$X = \begin{cases} 0.25+0.81R, & Si\ 0 \le R \le 0.31 \\ 0.50+0.5(R-0.31), & Si\ 0.31 < R \le 0.41 \\ 1+2(R-0.41), & Si\ 0.41 < R \le 0.66 \\ 1.5+1.47(R-0.66), & Si\ 0.66 < R \le 1 \end{cases}$$

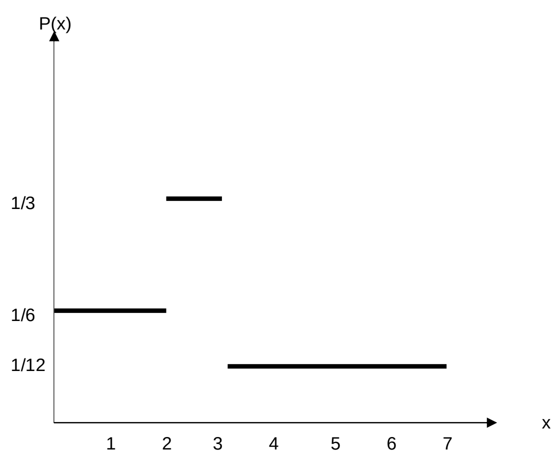
Si generamos algunas variables aleatorias con estas expresiones, tenemos

| i | Numero Aleatorio $R_i$ | Tramo de Recta | Variable Aleatoria $X_i$ |
|---|---|---|---|
| 1 | .5545 | 3 | 1.2890 |
| 2 | .8921 | 4 | 1.8411 |
| 3 | .2176 | 1 | 0.4240 |
| 4 | .7023 | 4 | 1.5621 |
| 5 | .3876 | 2 | 0.5388 |

**Ejemplo 2**

Considere la variable aleatoria que tiene como FDP $p(x)=\begin{cases} 1/6, & 0 \le x \le 2 \\ 1/3, & 2 < x \le 3 \\ 1/12, & 3 < x \le 7 \end{cases}$

Como se muestra en la figura siguiente



La FDA de esta distribución esta dada por;

$$P(X)=\begin{cases} a) & \frac{1}{6}x & 0\leq x\leq 2 \\ b) & \frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(x-2\right) & 2<x\leq 3 \\ c) & \frac{2}{3}+\frac{1}{12}\left(x-3\right) & 3<x\leq 7 \end{cases}$$

obtenida de la forma siguiente

a) $\int_0^x \frac{1}{6}dx = \frac{x}{6}$

b) $\frac{x}{6}\Big|_{x=2} + \int_2^x \frac{1}{3}dx = \frac{1}{3}+\frac{(x-2)}{3}$

c) $\frac{1}{3}+\frac{(x-2)}{3}|_{x=3}+\int_{3}^{x}\frac{dx}{12}$

desarrollando el proceso generador, utilizando el proceso de transformación inversa, donde R=F(x), tenemos que;

a) En R=1/6 (X) , para $0\leq X\leq 2$, implica que $0\leq R\leq 1/3$, en cuyo caso X=6 R

b) En R=1/3 + 1/3(X-2), para $2<X\leq 3$ , implica que $1/6<R\leq 2/3$, en cuyo caso X=3(R-1/3)+2

c) En R=2/3+1/12(X-3), para $3<X\leq 7$, implica que $2/3<R\leq 1$, en cuyo caso X=12(R-2/3)+3

Por lo que X (variable aleatoria) puede ser generada por

$$X=\begin{cases} 6R & 0\leq x\leq \frac{1}{3} \\ 3(R-\frac{1}{3})+2 & \frac{1}{3}<R\leq \frac{2}{3} \\ 12(R-\frac{2}{3})+3 & \frac{2}{3}<x\leq 1 \end{cases}$$

**Ejemplo 3**

Desarrolle un proceso generador para las siguientes funciones de densidad de probabilidad.

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}e^{x}, & -\infty<x\leq 0 \\ \frac{1}{2}e^{-x}, & 0<x\leq\infty \end{cases}$$

Para generar la función de densidad acumulada de probabilidad (FDA), tenemos que

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}e^{x}=\frac{1}{2}e^{x}|_{-\infty}^{x}=\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-\infty})=\frac{1}{2}e^{x}$$

Como R = F(x) = ½ e ; X =Ln (2R), para R < ½ , y

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{2} e^{-x} = -\frac{1}{2} e^{-x} \Big|_0^x = -\frac{1}{2}(e^{-x} - e^0) = -\frac{1}{2}(e^{-x} - 1) = ½ - ½e^{-x}$$

La FDA de esta distribución esta dada por;

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{x}, & -\infty < x \leq 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{+x}, & 0 < x \leq \infty \end{cases}$$

Como R = F(X) = ½ - ½ $e^{-x}$ ; R - ½ = - ½ $e^{-x}$ ; X = - Ln (1- 2R) , para ½ ≤ R ≤ 1

Por lo que X (variable aleatoria) puede ser generada por

$$X = \begin{cases} Ln(2R) & 0 \leq R \leq \frac{1}{2} \\ -Ln(1-2R), & \frac{1}{2} < R \leq 1 \end{cases}$$

## Problemas Propuestos

1. En un proceso de producción de chips microprocesadores el 2% de los mismos salen defectuosos. Cada día se toma una muestra aleatoria de 50 unidades. Si la muestra contiene más de 2 defectuosos, el proceso debe ser parado. Determinar la probabilidad de que el proceso sea parado por el esquema de muestreo.

2. Un autobús llega cada 20 minutos a una parada determinada comenzando su servicio a las 6:40 AM y terminando a las 8:40 AM. Un pasajero determinado no conoce la planificación pero llega de forma uniformemente distribuida entre las 7:00 AM y las 7:30 AM cada mañana. ¿Cuál es la probabilidad de que el pasajero espere más de 5 minutos por el bus?.

3. Supongamos que la vida de una lámpara industrial en miles de horas se encuentra distribuida exponencialmente con una razón λ=1/3 (esto es, se produce un fallo cada 3000 horas). Calcular la probabilidad de que la lámpara dure más de 3000 horas. Calcular la probabilidad de que una

lámpara dure entre 2000 y 3000 horas. Calcular la probabilidad de que dure otras 1000 horas si ha estado funcionando durante 2500 horas.

4. El profesor de un colegio se va a casa durante el verano, pero desea dejar una luz encendida en el colegio para desanimar a los ladrones. Para ello instala un dispositivo de dos bombillas, de tal modo que se encienda la segunda caso de fallar la primera. La caja en la que vienen las bombillas pone: "vida media de 1000 horas, exponencialmente distribuida". El profesor vuelve al cabo de 90 días (2160 horas). ¿Cuál es la probabilidad de que se encuentre una bombilla encendida?.

5. Un determinado examen médico es llevado a cabo en tres etapas por un médico. Cada etapa dura un tiempo exponencialmente distribuido con una media de tiempo de servicio de 20 minutos. Encontrar la probabilidad de que el examen dure 50 minutos o menos. Además, determinar la duración media del examen.

6. El tiempo que se permanece en la cola de un autoservicio se ha visto que sigue una distribución N(10,9). ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente espere entre 9 y 12 minutos?

7. El tiempo perdido desde la demanda de un determinado artículo X se puede aproximar por una distribución normal con un valor medio de 25 días y una varianza de 9. Se desea conocer un valor de tiempo perdido tal que sea sólo excedido un 5% de las veces que se formule un pedido.

8. Se sabe que el tiempo que tarda en fallar un componente electrónico viene dado por una distribución Weibull con $v=0$, $\alpha=1/3$ y $\beta=200$ horas. Calcular: a) la vida media (o tiempo medio que tarda en fallar el componente); b) la probabilidad de que un componente falle antes de 2000 horas.

9. Un sensor electrónico determina la calidad de chips semiconductores, rechazando aquéllos que fallan. Bajo demanda, el sensor dará el máximo y mínimo número de rechazos durante cada hora de producción durante las últimas 24 horas. También da la media. Sin información adicional, el departamento de control de calidad ha asumido que el número de chips rechazados viene dado aproximadamente por una distribución triangular. El volcado de datos actual indica que el número mínimo de chips rechazados por hora fue 0, el máximo 10 y la media 4. Calcular: a) la moda; b) la mediana; c) un número de chips tal que sólo el 5% de las veces el número de chips rechazados por hora sea superior a él.

10. Un avión tiene sistemas hidráulicos duplicados. El avión conmuta automáticamente al sistema de reserva si falla el sistema primario. Si ambos sistemas fallan, el avión puede sufrir un accidente. Supóngase que la vida del sistema hidráulico está distribuida exponencialmente con una media de 2000 horas de vuelo. a) Si los sistemas hidráulicos son inspeccionados cada 2500 horas ¿cuál es la probabilidad de que el avión sufra un accidente antes de ese tiempo? b) ¿Qué probabilidad de peligro puede esperarse si la inspección se hace cada 3000 horas en lugar de cada 2500 horas? c) Si se quiere reducir la posibilidad de accidente a 2%, ¿cada cuántas horas de vuelo hay que revisar el sistema hidráulico?

11. Un cartero tiene una ruta consistente en 5 segmentos y el tiempo que tarda en cubrir cada segmento está normalmente distribuido con una media y varianza tales como las que se detalla: segmento A: N(38,16); segmento B: N(99,29); segmento C: N(85,25); segmento D: N(73,20); y segmento E: N(52,12). Además de los recorridos, el cartero necesita organizar el correo en la oficina, lo que requiere un tiempo N(90,25). Llegar al punto de partida de la ruta requiere un tiempo N(10,4), y volver requiere un tiempo N(15,4). El cartero finalmente debe hacer tareas administrativas que le llevan un tiempo N(30,9). a) ¿Cuál es el tiempo de trabajo esperado para el cartero en un día?. b) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga que trabajar más de 8 horas durante un día? c) ¿Cuál es la probabilidad de que trabaje más de 8 horas 2 o más días en una semana de 6 días? d) ¿Cuál es la probabilidad de que un día cualquiera la ruta sea completada en 8h±24 minutos?

12. A una oficina de expedición de licencias llegan los clientes aleatoriamente a un ritmo de  =50 clientes por hora. Hay 20 funcionarios, cada uno de los cuales despacha $\mu=5$ clientes por hora en promedio. a) ¿Qué porcentaje de tiempo está cada funcionario ocupado?. b) ¿Cuál es el número medio de funcionarios ocupados?. c) El jefe de la oficina se pregunta si puede disminuir el número de funcionarios, en caso de poderse hacer ¿cuál es el número mínimo que se precisa para que puedan ser atendidos todos los clientes?

13. Hay dos personas compitiendo para obtener un empleo. Abel dice que es más rápido despachando que Benito, pero Benito dice que él es mucho más uniforme en su trabajo. Las llegadas llegan de acuerdo con un proceso de Poisson con una razón  de 2 por hora (1/30 por minuto). Las estadísticas de Abel dan un tiempo medio de servicio de 24 minutos con una desviación estándar de 20 minutos. Las estadísticas de Benito dan un tiempo medio de 25 minutos, con una desviación estándar de tan sólo 2 minutos. Si la longitud promedio de la cola es el criterio de selección ¿qué trabajador debería ser seleccionado?.

14. Los tiempos de llegada así como los tiempos de servicio en una peluquería se ha visto que están distribuidos exponencialmente. Llegan 2 clientes por hora y son atendidos 3 clientes por hora. Calcular la probabilidad de encontrar 0, 1, 2, 3, y 4 o más clientes en el sistema. Calcular la probabilidad de que el peluquero esté ocupado, el número medio de clientes en el sistema, el tiempo medio consumido por cliente en ese sistema, el tiempo medio que un cliente se pasa esperando en la cola y el número medio de clientes que hay en la cola.

15. Supóngase que los mecánicos de un gran taller, con muchos mecánicos, llegan aleatoriamente a un almacén de herramientas con una razón de Poisson  de 10 por hora. Se sabe que hay un sólo dependiente en ese almacén que atiende a cada mecánico en un tiempo medio de 4 minutos y una desviación estándar de aproximadamente 2 minutos. Se sabe que los tiempos de servicio siguen una distribución de Erlang de orden k. Un mecánico produce 1500 Pesos/hora cuando está trabajando. ¿Cuánto cuesta la espera en la cola por la visita de un mecánico al almacén y cuál es el costo medio por hora por ese concepto para el conjunto de todos los mecánicos?

16. Las llegadas a un aeropuerto van todas ellas a la misma pista de aterrizaje. En un determinado momento del día estas llegadas siguen una distribución de Poisson a razón de 30 por hora. El tiempo que tarda un avión en tomar tierra es constante, 90 segundos. a) Calcúlese longitud media de la cola, tiempo de espera medio en la cola, ocupación del sistema y tiempo medio de respuesta para este aeropuerto. b) Si un aterrizaje retrasado cuesta 50,000 pesos de combustible por hora en promedio, calcúlese el costo promedio por hora de la espera de los aviones para aterrizar y el costo promedio por avión.

17. La peluquería descrita en el problema 14 puede sólo alojar 3 clientes, uno en servicio y 2 esperando. Los clientes restantes deben darse la vuelta si encuentran la peluquería llena. Establecer las medias de rendimiento para este sistema.

18. Considérese el problema 15 de los mecánicos que van al almacén de herramientas. Supongamos que las llegadas son un proceso de Poisson a razón de 2 mecánicos por minuto y con tiempos de servicio con una media de 40 segundos distribuidos exponencialmente. ¿Cuántos dependientes hacen falta para que el sistema sea estable?. Analícese el rendimiento del sistema con el mínimo número de dependientes necesario.

19. Hay 2 trabajadores encargados de 10 máquinas en una fábrica. Las máquinas funcionan durante un tiempo medio de 20 minutos y entonces requieren un tiempo de servicio medio de 5 minutos; ambos tiempos se hallan distribuidos exponencialmente. Determinar las diversas medidas de rendimiento de este sistema.

20. Un almacén de madera es servido por una flota de 10 camiones. Hay una grúa disponible para descargar los troncos de los camiones. Tarda un promedio de 1 hora en descargar un camión. Después de la descarga cada camión tarda un promedio de 3 horas en volver al almacén con la

siguiente carga de troncos. a) Es necesario realizar ciertas suposiciones sobre las distribuciones de tiempos para poder analizar este problema de acuerdo con los modelos estudiados. Háganse y justifíquense. b) Con una grúa, ¿cuál es el número promedio de camiones esperando a ser descargados?¿cuántos camiones llegarán por término medio al almacén cada hora?¿qué porcentaje de camiones encuentran al llegar la grúa ocupada?¿es éste el mismo que la proporción de tiempo que la grúa está ocupada?. c) Supóngase que se instala una segunda grúa en el almacén. Responda a las mismas preguntas que en el apartado b). Haga una tabla comparando el resultado para una o 2 grúas. d) Si el valor de los troncos que llegan al almacén es de 20.000 pesos por camión y la grúa cuesta 5000 pesos/hora (esté trabajando o no), establezca cuál es el número óptimo de grúas sobre la base del costo por hora. e) Además de los costos supuestos en el apartado d), si la dirección decide considerar el costo de los camiones parados y sus conductores ¿cuál es el número óptimo de grúas? Un camión y su conductor tienen un costo estimado en 4.000 pesos por hora y se considera que están parados mientras están esperando en la cola para ser descargados.

21. Supóngase que se han recogido 100 tiempos de reparación de una máquina. Esos datos aparecen en la tabla siguiente en términos del número de observaciones para los diferentes intervalos.

| Intervalo (horas) | Frecuencia | Frecuencia relativa | Frecuencia acumulada |
|---|---|---|---|
| 0 x 0.5 | 31 | 0.31 | 0.31 |
| 0.5 x 1.0 | 10 | 0.10 | 0.41 |
| 1.0 x 1.5 | 25 | 0.25 | 0.66 |
| 1.5 x 2.0 | 34 | 0.34 | 1.00 |

Supóngase además que todas las reparaciones duran más de 15 minutos. Establecer el mecanismo para generar valores de una variable aleatoria que tenga su misma distribución.

22. Al final del día, el número de embarques en los muelles de carga de una compañía es 0, 1 o 2, con una frecuencia relativa de ocurrencia de 0.50, 0.30 y 0.20 respectivamente. Establecer el esquema de generación de una variable aleatoria discreta que tenga esta distribución, supuesto que el número de embarques se modela como una distribución discreta.

23. Considérese la distribución uniforme discreta en {1, 2, ..., k} con una función fdp dada por p(x)=1/k, con x =1, 2, ..., k y una función de distribución dada por:

| | |
|---|---|
| F(x) = 0 | si x 1 |
| 1/k | si 1 x<2 |
| 2/k | si 2 x<3 |
| .................. | .................. |
| (k-1)/k | si (k-1) x<k |
| 1 | si k x |

¿Cómo generar una variable aleatoria X que tenga esa distribución?

24. Una firma de ventas por catálogo envía sus encargos a un almacén central. Los encargos son agrupados en cestas que van recorriendo el almacén en un vehículo. Las cestas entran en el área de empaquetado en grupos de 10. Los empaquetadores pueden ver fácilmente cuántos encargos hay en la cola. Se está haciendo una simulación del área de empaquetado. Parece existir una relación entre la longitud de la cola y la velocidad de empaquetado. Si eso ocurre, la velocidad de servicio puede cambiar como una función de la longitud de la cola. Se ha realizado un estudio de la operación, obteniéndose los resultados de la tabla siguiente:

Observación i 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Longitud de la cola x | 20 | 30 | 30 | 50 | 30 | 40 | 40 | 60 | 30 | 20 | 40 | 40 | 50 | 20 | 40 |
| Velocidad de (paquetes en Empaquetado 10 minutos) | 20 | 24 | 29 | 24 | 27 | 33 | 31 | 39 | 23 | 18 | 34 | 32 | 36 | 21 | 30 |

Encontrar la relación entre la velocidad de empaquetado y la longitud de la cola.

25. Los camiones llegan a un gran almacén en una forma totalmente aleatoria la cual puede ser modelada como un proceso de Poisson con razón de llegada de $\lambda$=10 camiones por hora. El controlador de la entrada envía los camiones alternativamente hacia las terminales norte o sur. Un analista ha desarrollado un modelo para estudiar el proceso de carga/descarga en la terminal sur, y necesita un modelo del proceso de llegada a esa terminal. Establézcase el esquema para generar tiempo entre llegadas.

26. Los tiempos de servicio en la ventanilla de un cajero se hallan normalmente distribuidos con una media de $\mu$=7.3 minutos y varianza 2=11.7 minutos. Generar 10 tiempos de servicio.

27. Generar tres valores de una variable de Poisson con $\lambda$=0.2.

28. El autobús llega a una parada determinada según un proceso de Poisson con una media de un bus cada 15 minutos. Generar una variable aleatoria, N, que represente el número de llegadas de autobús durante un intervalo de tiempo de 1 hora.

29. Los tiempos de parada para una máquina de hacer caramelos se ha comprobado que vienen dados por una variable aleatoria de distribución gamma con una media de 2.2 minutos y una varianza de 2.10 minutos2. Genérese una secuencia de tiempos de parada que se ajuste a esa distribución.

30. Un espía trata de determinar el número de tanques que tiene el ejército enemigo. El enemigo marca cada tanque con un número. Sabe que el número más bajo es 100 y los tanques están numerados secuencialmente desde 100 hasta algún número desconocido dado por 100+b. El espía se coloca en un cruce de carreteras durante un día, observa los tanques que pasan y anota sus números, obteniendo lo siguiente: 1783, 1522, 920, 587, 3653, 146, 2937, 1492, 736, 372, 3104, 3535. ¿Cuántos tanques se puede estimar que tiene el ejército enemigo?.

31. Desarrolle una variable aleatoria con la siguiente función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x}, & -\infty < x \leq 0 \\ e^{-2x} & 0 < x \leq \infty \end{cases}$$

32. Desarrolle el esquema para una distribución triangular con la siguiente función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-2), & 2 < x \leq 3 \\ \frac{1}{2}\left(2 - \frac{x}{3}\right), & 3 < x \leq 6 \\ 0, & \textit{Cualquier otro caso} \end{cases}$$

33. Desarrolle un generador para la variable aleatoria cuya función de densidad de

probabilidad es

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{3}, & 0<x\leq 2 \\ \frac{1}{24}, & 2<x\leq 10 \\ 0 & \textit{Cualquier otro caso} \end{cases}$$

34. Dada la siguiente variable continua para una función de densidad de probabilidad con rango de -3 a 4, desarrolle un generador para la variable.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\leq -3 \\ \frac{1}{2}+\frac{x}{6}, & -3<x\leq 0 \\ \frac{1}{2}+\frac{x^2}{32}, & 0<x\leq 4 \\ 4 & x>4 \end{cases}$$

## Referencias Bibliográficas


Bratley, P., L. Box, Y L.E. Scharge [1987], *A Guide to Simulation*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York.

Box, G.E.P., Y M-F.Muller [1958], "A Note to Generation of Random Normal Deviates, "*Annals of Mathematical* Statisticas, Vol. 29, pag. 610-11.

Cheng, R.C.H. [1977], The Generation of gamma variables," *Applied Statistician*, Vol. 26, No. 1, pag. 71-75.

Dagpunar, John [1988], *Principles od random Variate Generation*, Claredon Press, Oxford.

Devroye, Luc [1986], *Non-Uniform Random Variate Generation*, Springer-Verlag, New Cork.

Fishman, George S. [1978], *Principles of Discrete Event Simulation*, wiley, New Cork.

Law, A.M., Y W.D. Kelton [1991], *Simulation Modeling & Análisis*, 2nd ed., McGraw-hill, New York.

Ripley, Brand D. [1978], *Stochastic Simulation*, Wiley, New York.

Schmeiser, Bruce W. [1979], "Approximations to the inverse Cummulative Normal Function for use on Hand Calculators", *Applied Statistics*, Vol. 28, pag. 175-176.

Schmeiser, Bruce W. [1980], Random variate generation: A Survey", *in Simulation with Discrete Models: A State of de Art View*, T.I Oren, C.M. Shub, and P.F. Roth, eds., IEEE.

SCHMIDT, J.W., Y R.E. TAYLOR [1970], *Simulation and Análisis of Industrial Systems*, Irwin, Homewood,Ill.

www.virtual.unal.edu.co/cursos/sedes/ manizales/4030011/lecciones/cap3/cap_3_pag_13.html