INTRODUCCION A LA PROGRAMACION LINEAL

Programación Lineal (P.L.) consiste en un grupo de métodos matemáticos para optimización en planeación, o control de dinero, maquinaria, tiempo y espacio. El trata con la asignación de recursos limitados con fines parecidos, cada uno de los cuales teniendo ciertos niveles de utilidad. P.L. optimiza a un valor del sistema sujeto a un conjunto de restricciones. La función objetivo expresa el valor del sistema a las metas. Las restricciones son limitaciones del método, tales como capacidad, disponibilidad, etc., que limitan el grado al cual la función objetivo puede ser seguida.

Si una organización debe seleccionar una estrategia y sus recursos son limitados en abastecimiento e interrelacionados, entonces P.L. puede ser usada si se puede expresar el objetivo y las restricciones como igualdades o desigualdades matemáticas lineales.

No existe una fórmula algebraica para calcular la solución de un problema de P.L., todos los métodos disponibles son iterativos. Lo que significa que el mismo tipo de operación debe ser repetida hasta que la solución óptima sea obtenida.

Notación matemática:
El método Simplex utiliza el procedimiento Gauss-Jordan de eliminación completa y utiliza una función objetivo para indicar cuando la optimización es obtenida.
El método simplex puede ser formulado de manera siguiente:

Optimizar $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$, sujeto a:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + a_{12}x_2 & + & \cdots & + a_{1n}x_n & \geq & b_1 \\ a_{21}x_1 & + a_{22}x_2 & + & \cdots & + a_{2n}x_n & \geq & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + a_{m2}x_2 & + & \cdots & + a_{mn}x_n & \geq & b_m \end{array}$$

donde $a_{i,j}$, b_i y c_j son constantes y además:

$b_i \geq 0,\ i = 1,2,\ldots,m$

$x_j \geq 0,\ j = 1,2,\ldots,n$

en notación matricial el modelo Simplex puede ser formulado como:

optimizar: $Z = CX$ sujeto a:

$AX = b$ donde A, b y C son constantes.

A matriz de m, n.

b matriz de $m,1$.

C matriz de $1, n$.

El método simples provee un procedimiento sistemático para encontrar valores para las x_j's, tales que la función objetivo Z es optimizada dentro del espacio de solución definido por las restricciones lineales ($AX \geq b$).

PLANTEAMIENTO DE PROBLEMAS DE PROGRAMACION LINEAL

Introducción.
La programación lineal trata con problemas en los cuales una función objetivo lineal va a ser optimizada (por ejemplo maximizada o minimizada), sujeta a restricciones lineales de igualdad o de desigualdad y a restricciones de signo en sus variables. Para plantear o formular un problema de la vida real como un problema de Programación Lineal (P.L.), es un arte en sí mismo. Aún cuando existen excelentes métodos para resolver un problema, una vez que éste ha sido planteado o formulado como uno de Programación Lineal, existe poca teoría para ayudar a la formulación en los problemas de ésta forma. En los problemas de la vida real algunas aproximaciones deber ser realizadas antes de que éstos puedan ser formulados como problema de P.L. Los principios básicos serán considerados utilizando un ejemplo simple.

Problema de la mezcla de productos.
Una compañía fabrica dos tipos de fertilizantes, llamados Alto-Fosfato (AF) y Bajo-Fosfato(BF), 3 materias primas básicas son usadas en la producción de estos fertilizantes en la forma siguiente:

Materia prima	Toneladas de materia prima para producir una tonelada de:		Cantidad máxima de materia prima disponible por mes (toneladas)
	AF	BF	
1	2	1	1500
2	1	0	1200
3	1	0	500
Precio de venta por tonelada de fertilizante	$15	$10	

¿Cuántas toneladas de cada fertilizante deberá producir la compañía para maximizar los ingresos mensuales por venta?
Este problema será formulado usando un enfoque directo.

El enfoque directo.
Paso 1. Prepara una lista de todas las variables de decisión en el problema. Esta lista debe ser completada en el sentido de que si una solución óptima que provee los valores de las variables es obtenida, el tomador de decisiones deberá se capaz de traducirle en un política óptima que pueda ser implementada.
Las variables son:

x_1 =Las toneladas de Alto-Fosfato a producir.

x_2 =Las toneladas de Bajo-Fosfato a producir.

Asociada con cada variable en el problema está una actividad que el tomador de decisiones pueda realizar. En este problema existen 2 actividades:

Actividad 1: Producir una tonelada de Alto-Fosfato.

Actividad 2. Producir una tonelada de Bajo-Fosfato.

Las variables en el problema definen los niveles en los cuales ésta actividad es llevada a cabo. Cuando las restricciones que limitan a las variables son escritas, será claro que habrá variables adicionales (llamadas variables de holgura), impuestas en el problema por restricciones de desigualdad.

i) Consideración de proporcionalidad.
Se requieren 2 toneladas de materia prima 1 para producir una tonelada de AF. La consideración de proporcionalidad implica que $2x_1$ toneladas de materia prima 1 son requeridas para producir x_1 toneladas de AF para cualquier $x_1 \geq 0$.

En general la consideración de proporcionalidad garantiza que si a_{ij} unidades del artículo i son consumidas (o producidas) en llevar a cabo la actividad j al nivel unidad, entonces $a_{ij}x_j$ unidades de un artículo son consumidas (o producidas) en llevar a cabo la actividad j al nivel x_j para cualquier $x_j \geq 0$.
Además, bajo esta misma consideración ya que una tonelada de fertilizante de AF se vende a $15.00, x_1 toneladas del mismo se vende por $15.00 x_1 para cualquier $x_1 \geq 0$.

ii) Consideración de aditividad.
Se requieren dos toneladas de materia prima 1 para producir una tonelada de AF y una tonelada de la misma materia prima para producir una tonelada de BF. La consideración de aditividad implica que $2x_1 + x_2$ toneladas de materia prima son requeridas para producir x_1 toneladas de AF y x_2 toneladas de BF para cualquiera $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Generalmente la consideración de aditividad implica que el total de consumo o producción de un artículo es igual a la suma de las varias cantidades de un artículo consumido (o producido) en llevar a cabo cada actividad individual a su nivel especificado.

Esta consideración implica además que la función objetivo es separable en sus variables, esto es, si las variables en el modelo son: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y la función objetivo es $z(x_1, x_2, \ldots, x_n) = z(x)$, entonces $z(x)$ puede ser escrita como la suma de N funciones, donde cada una de las cuales incluye solamente una variable en el modelo (por ejemplo, $z_1(x_1) + z_2(x_2) + \cdots + z_n(x_n)$, donde $z_j(x_j)$ es la contribución de la variable x_j a la función objetivo).

iii) consideración de variación de continuidad.
Se asume que cada variable en el modelo puede tomar todos los valores reales en su rango de variación.
En problemas de la vida real, algunas variables pueden ser restringidas a tomar únicamente valores enteros (por ejemplo, si la variable representa un número de camiones vacíos de un sitio a otro). Tales restricciones hacen del problema un problema

de Programación Entera. Este tipo de problemas son más difíciles de resolver que aquellos de variables continuas como Programación Lineal.
Las implicaciones de las consideraciones de proporcionalidad y actividad, automáticamente implican que todas las restricciones en el problema sean igualdades o desigualdades lineales. Ellos además implican que la función objetivo sea lineal.

Paso 2. Escriba todas las restricciones y la función objetivo en el problema (las restricciones sobre las variables deber ser no-negativas).

Las variables x_1 y x_2 deber ser no-negativas para tener un sentido práctico. En modelos de Programación Lineal en general, la restricción de no-negatividad sobre las variables es una restricción natural que ocurre a causa de que ciertas actividades pueden ser realizadas únicamente a niveles no negativos (producción de un producto, hectáreas sembradas, partes vendidas, etc.).
Elabore una lista de todos los artículos que conducen a una restricción en el problema, cada materia prima conduce a una restricción (ecuación restrictiva); por ejemplo, la restricción impuesta por la limitación de materia prima usada es $2x_1 + x_2$ toneladas y ésta no puede exceder de 1,500 toneladas esto impone la restricción:

$$2x_1 + x_2 \leq 1500$$

Ya que la desigualdad compara la cantidad de materia prima 1 disponible usada, esta es llamada "desigualdad de balance de material".
Cada desigualdad de balance material en el modelo contiene en sí misma la definición de otra variable no-negativa conocida como variable de holgura. Por ejemplo, la restricción de la cantidad de materia prima 1, $2x_1 + x_2 \leq 1500$, puede ser escrita como $1500 - 2x_1 - x_2 \geq 0$. Si definimos $x_3 = 1500 - 2x_1 - x_2$, entonces x_3 es una variable de holgura que representa la cantidad de materia prima 1 que permanece inutilizada y la restricción puede ser escrita como:

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 1500\text{ , } x_3 \geq 0$$

Si ahora consideramos que la restricción impuesta por la limitación de la cantidad disponible de materia prima 1 fuera $2x_1 + x_2 \geq 1500$, esta puede ser escrita como $-1500 + 2x_2 + x_1 \geq 0$. Si definimos $x_4 = -1500 + 2x_1 + x_2$, entonces x_4 es una variable de holgura que representa la cantidad de materia prima en excedente y la restricción puede ser escrita como:

$$2x_1 + x_2 - x_4 = 1500\text{ , } x_4 \geq 0$$

Ahora escribamos la función objetivo. Utilizando las consideraciones de proporcionalidad y aditividad ésta es garantizada se una función lineal de las variables. Completando la formulación del problema como uno de Programación Lineal, se tiene lo siguiente:
Maximizar: $z(x) = 15x_1 + 10x_2$
Sujeto a:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\le 1500 \\ x_1 + x_2 &\le 1200 \\ x_1 \qquad &\le 500 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

EJEMPLOS DE PLANTEAMIENTO Y FORMULACIÓN DE PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL

PROBLEMA DE LA MEZCLA DE PRODUCCIÓN

Una compañía de manufactura produce 4 tamaños de piezas; pequeño, mediano, largo y extralargo. Estás piezas pueden ser producidas en cualquiera de los tres tipos de maquinas; A. B Y C. La longitud en metros de estas piezas que pueden ser producidas por hora en las máquinas, se resume a continuación:

MAQUINAS

PIEZAS	**A**	**B**	**C**
PEQUERO	300	600	800
MEDIANO	250	400	700
LARGO	200	350	600
EXTRA LARGO	100	200	300

.Unidades en metros-hora

Asuma que cada maquina puede ser usada hasta 50 horas por semana y que los costos de operación por hora son respectivamente de \$30, \$50 Y \$80. Además suponga que se requiere semanalmente de 10,000, 8,000, 6,000 y 6,000 metros de diferente tamaño de piezas. Formule el problema de asignación de maquinas como un problema de Programación Lineal.

PLAMTEAMIENTO;

$X_{ij} \longrightarrow$ Cantidad de horas utilizadas en producir en metros el tipo de pieza i en la maquina J

Función Objetivo:

Reducir 1os costos totales de operación de 1as maquinas al producir 1as diferentes cantidades de metros de cada tipo de pieza.

MINIMIMIZAR Z = $30(x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41})$

$+50(x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42})$

$+80(x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43})$

SUJETO A;

Satisfacer la demanda de la longitud en metros de cada tipo de pieza.

$$300x_{11} + 600x_{12} + 800x_{13} \geq 10{,}000$$
$$250x_{21} + 400x_{22} + 700x_{23} \geq 8{,}000$$
$$200x_{31} + 350x_{32} + 600x_{33} \geq 6{,}000$$
$$100x_{41} + 200x_{42} + 300x_{43} \geq 6{,}000$$

PROBLEMA DEL RECORTE

La compañía de papel "LA CANELA" fabrica papel para vender a comercializadores en rollos de diferentes tamaños. La compañía produce rollos de papel estándar de 120" de ancho y todas las órdenes no son necesariamente de este ancho. La compañía frecuentemente recibe órdenes para rollos de anchos menores. Para satisfacer esas ordenes, los rollos de ancho menor son cortados de rollos estándar. Para el mes próximo la compañía ha comprometido las siguientes órdenes:

Ancho del Rollo	Ordenes
80"	1800
70"	500
60"	1200
50"	1400

LA CANELA desea determinar el No. mínimo de rollos estándar que serán requeridos para satisfacer la demanda Formule este problema como uno de Programación Lineal -

Planteamiento:
Se debe de determinar todos los posibles tipos de cortes a realizar a los rollos de 120" de forma tal que se puedan obtener con estos los anchos de rollos ordenados buscando tener el menor desperdicio.

Sea x_i No. de cortes del tipo de corte i realizado a un rollo de 120"
Ejemplo: x_3(tipo de corte 3) de cada rollo de 120" se corta un rollo de ancho 60", otro de ancho de 50" y teniéndose un sobrante (desperdicio) de 10".

Tipo de Ancho	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
80"	1	0	0	0	0
70"	0	1	0	0	1
60"	0	0	1	1	0
50"	0	1	1	1	0
Desperdicio	40	0	10	10	50

Cualquier otro tipo de recorte arrojara un desperdicio muy grande, por lo que se descartará su uso.
Función Objetivo;

Minimizar $Z = 40x_1 + Ox_2 + lOx_3 + lOx_4 + 50x_5$

Sujeto a;

$$
\begin{aligned}
X_1 & \geq 1800 \\
X_2 + \quad\quad + X_5 & \geq 500 \\
X_3 + X_4 & \geq 1200 \\
X_2 + X_3 + X_4 & \geq 1400 \\
X_i & \geq O
\end{aligned}
$$

PROBLEMA DEL INVERSIONISTA

Gilberto tiene $2. 2 Millones para invertirse en los próximos 5 anos. Al principio de cada año el puede invertir dinero en depósitos de periodo a un año y a 2 años. El banco paga un 28% de interés en depósito a un año y el 57% en depósitos a dos años. Además, ofrecen certificados (CEPROFI´S) de tres años al principio del segundo año. Estos certificados dan un 87% total si Gilberto reinvierte su dinero disponible cada año, formule este problema como un modelo da Programación Lineal para mostrar como Gilberto maximizara su dinero al termino del 5o. año.

PLANTEAMIENTO:

x_i ⟶ Cantidad de dinero invertida en el año i en el plan j
donde j puede ser

A) Inversión a un año rendimiento del 28% de lo. al 5o. año
B) " a dos años " " 57% de lo. al 5o. "
C) " a tres años " " 87% de 2o. al 5o. "
D) Dinero no invertido

Periodo 0, año 1

$$x_{A1} + x_{Bl} + x_{D1} = 2.2$$

Periodo 1, año 2

Al principio del año 2 se recupera la inversión realizada en el año 1. en el plan "A" junto con su rendimiento del 28%, más el dinero no invertido; teniéndose esto disponible para invertirse en el año 2.

$$x_{A2} + x_{B2} + x_{C2} + x_{D2} = 1.28x_{A1} + 1.57x_{B1} + x_{D1}$$

Período 2, año 3

Al principio del año 3 se recupera la inversión realizada en el año 2, en el plan "A" junto con el 28% de su rendimiento, mas en el plan "B" junto con el 57% de su rendimiento, mas el dinero no invertido; teniéndose este disponible para invertir en el año 3.

$$x_{A3} + x_{B3} + x_{C3} + x_{D3} = 1.28x_{A2} + 1.57x_{B1} + x_{D2}$$

Período 3, año 4

Al principio del año 4 se recupera la inversión realizada en el año 3, en el plan "A" junto con el 28% de su rendimiento, más en el plan "B" junto con el 37% de su rendimiento, más el dinero no invertido; teniéndose este disponible para invertirse en el año 4.

$$x_{A4} + x_{B4} + x_{D4} = 1.28x_{A3} + 1.57x_{B2} + x_{D3}$$

Periodo 4, año 5

Al principio del año 5 se recupera la inversión realizada en el año 4 en el plan "A" Junto con el 28% de su rendimiento, mas en el plan "B" Junto con el 57% de su rendimiento, más en el plan "C" junto con su rendimiento de 87, más el dinero no invertido; teniéndose esto disponible para invertirse en el año 5.

$$x_{A5} + x_{D5} = 1.28x_{A4} + 1.57x_{B3} + 1.87x_{C2} + x_{D4}$$

Al principio del año 6 se recupera la inversión realizada en el año 5, en el plan "A" Junto con el 28% de su rendimiento, más en el plan "B" junto con el 57% de su rendimiento. más en el plan "C" Junto con su rendimiento de 87%, más el dinero no invertido; teniéndose esto como la retribución total al programa de inversiones realizadas en los 5 años. Siendo la función Objetivo del problema:

MAXIMIZAR $Z = 1.28x_{A5} + 1.57x_{B4} + 1.87x_{C3}$

y además todas las x's deberán ser ≥ O

PROBLEMA DE ASIGNACIÓN DE RECURSOS

La compañía de comida rápida "COME POCO" opera bajo un servicio de 24 horas. La compañía emplea un No. de empleados; cada uno trabaja 8 horas consecutivas al día. Debido a que la demanda varia, el No. de empleados que se requiere varia a través del día. Sobre la base de pasadas experiencias la compañía ha proyectado la mano de obra mínima requerida para 6 periodos del día. Formule este problema como uno de Programación Lineal tal que minimice en No, de empleados que serán requeridos para atender las 24 horas de operaciones.

TIEMPO		No. MINIMO DE EMPLEADOS
12 -	4 A.M.	3
4 -	8 A.M.	5
8 -	12 P.M.	10
12 -	4 P.M.	6
4 -	8 P.M.	10
8 -	12 A.M.	8

Sea x_i el número de empleados en el turno i

Tiempo			Turno No.
12 -	- 4	A.M.	1 y 2
4 -	- 8	A.M.	2 y 3
8 -	- 12	P.M.	3 y 4
12 "	" 4	P.M.	4 y 5
4 -	- 8	P.M.	5 y 6
8 -	" 12	A.M.	6 y 1

Planteamiento;

El No. de empleados contratados por un periodo de 8 horas debe de se superior a las demandas de empleados de los turnos que cubre y existe combinación de empleados en los turnos cubiertos (es decir un empleado en un turno de 8 horas tiene las 4 primeras horas unos compañeros y otros las otras 4.)

Minimizar $Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$

Sujeto a;

$$x_1 + x_2 \geq 3$$
$$x_2 + x_3 \geq 5$$
$$x_3 + x_4 \geq 10$$
$$x_4 + x_5 \geq 6$$
$$x_5 + x_6 \geq 10$$
$$x_1 \quad x_6 \geq 8$$

$$x's \geq O$$

PROBLEMA DE MEZCLA DE GASOLINAS

Una compañía distribuidora de combustible vende dos tipo de gasolina; PLUS y la MINUS. Cada gasolina debe satisfacer ciertos requerimientos tales como la máxima presión de vapor permitida y la tasa de octanaje mínima. Los requerimientos del productor para la gasolina y el precio por barriles se muestran a continuación

Gasolina	Tasa mínima de octanaje	Máxima presión de vapor	Precio de venta por barril
MINUS	80	0	$ 21.00
PLUS	100	6	$ 23.00

Tres tipos de gasolina cruda se uti1izan para producir 1as gasolinas MINUS y PLUS. Las características de estas gasolinas se muestran a continuación:

Gasolina cruda	Tasa de octanaje	Presión de vapor	Abastecimiento Máximo (semanal)	Costo por barril
Tipo I	108	4	32000	$ 22.00
Tipo II	90	10	20000	$ 20.00
Tipo III	73	5	38000	$ 19.00

La compañía se ha comprometido a un comprador de abastecer 30000 barriles de gasolina MINUS por semana. No se han hecho compromisos de la gasolina PLUS. A la compañía le gustaría determinar el plan de manufactura para 1as dos gasolinas tal que se maximicen las ganancias.

Sean:

X_1 Número de barriles de gasolina tipo I usados en MI ÑUS

X_2 Número de barriles de gasolina tipo II usados en MINUS

X_3 Número de barriles de gasolina tipo III usados en MINUS

X_4 Número de barriles de gasolina tipo I usados en PLUS

X_5 Número de barriles de gasolina tipo II usados en PLUS

X_6 Número de barriles de gasolina tipo III usados en PLUS

Al mezclar las gasolinas crudas, la gasolina resultante tiene un octanaje y una presión de vapor en proporción al volumen de cada gasolina. Por ejemplo, sí 1000 barriles de la gasolina tipo I se mezclaran con 1000 barriles de la gasolina tipo II, la gasolina resultante tendría un octanaje de 99:

$$\frac{1000(108) + 1000(90)}{1000 + 1000} = 99$$

y una presión de vapor de 7.O:

$$\frac{1000(4) + 1000(10)}{1000 + 1000} = 7.0$$

Formulación

Función Objetivo: Maximizar Ingresos

Ganancia = Precio de Gasolinas - Costo de gasolinas

$$Z = 21(x_1 + x_2 + x_3) + 23(x_4 + x_5 + x_6) - 22 (x_1 + x_4)$$
$$- 20(x_2 + x_5) - 19(x_3 + x_6)$$

Restricciones;

Ventas: MINUS $x_1 + x_2 + x_3 \geq 3000$

Disponibilidad de Gasolinas

Tipo I $x_1 + x_4 \leq 32000$

Tipo II $x_2 + x_5 \leq 20000$

Tipo III $x_3 + x_6 \leq 38000$

Octanaje mínimo de las gasolinas

PLUS

$$\frac{108x_4 + 90x_5 + 73x_6}{x_4 + x_5 + x_6} \geq 100$$

MINUS

$$\frac{lO8x_1 + 90x_2 + 73x_3}{x_1 + x_2 + x_3} \geq 80$$

Presión de vapor

PLUS

$$\frac{4x_4 + 10x_5 + 5x_6}{x_4 + x_5 + x_6} \leq 6$$

MINUS

$$\frac{4x_1 + 10x_2 + 5x_3}{x_1 + x_2 + x_3} \leq 9$$

No-negatividad

X_i'S O

Siendo su formulací6n completa

Maximizar $Z = 21 (x_1 + x_2 + x_3) + 23 (x_4 + x_5 + x_6) – 22 (x_1 + x_2)$
$-20 (x_3 +x_4) - 19 (x_5+x_6)$

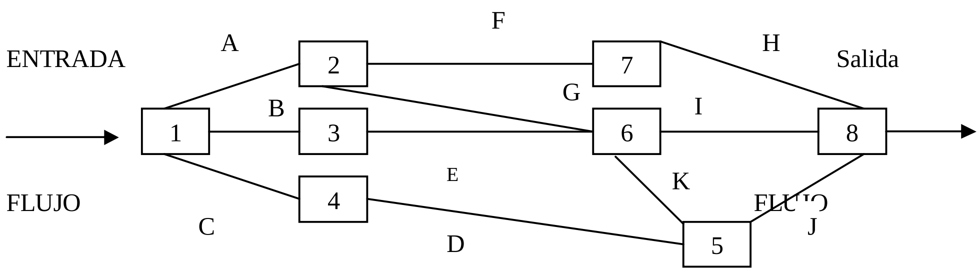
Sujeto a;

$$
\begin{array}{lr}
x_1 + x_2 + x_3 & \geq 3000 \\
x_1 + x_4 & \leq 32000 \\
x_2 + x_5 & \leq 20000 \\
x_3 + x_6 & \leq 38000 \\
8x_4 - 10x_5 - 27x_6 & \geq 0 \\
28x_1 + 10x_2 - 7x_3 & \geq 0 \\
-2x_4 + 4x_5 - x_6 & \leq 0 \\
5x_1 + x_2 - 4x_3 & \geq 0
\end{array}
$$

$X'S \geq 0$

PROBLEMA DE FLUJO MÁXIMO

El administrador de una compañía desea tener el máximo tráfico vehicular por hora entre la ciudad A la ciudad B. La ruta carretera para vehículos de motor se muestra a continuación. Los circos representan los caminos a través de provincias, las figuras adyacentes a los arcos son el No, máximo de vehículos por hora, y los nodos son intersecciones. Formule este problema como un modelo de Programación Lineal.



Sea x_i la capacidad de transito vehicular de la carretera i donde i puede ser: A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K

Aquí se utiliza el condiciones equilibrio, lo que entra es igual a lo que sale.

Así lo que entra al nodo 6 es igual a lo que sale, por ejemplo;

$$x_G + x_E + x_K = x_I$$

Y se buscará maximizar el tráfico vehicular que entra al nodo 1 o que sale del nodo 8 o sea;

$$x_H + x_I + x_J = x_A + x_B + x_C$$

Sean

x_A $\leq$ a La capacidad de trafico vehicular de la carretera A

x_B $\leq$ a La capacidad de trafico vehicular de la carretera B

x_C $\leq$ a La capacidad de trafico vehicular de la carretera C

x_D $\leq$ a La capacidad de trafico vehicular de la carretera D

x_E $\leq$ a La capacidad de trafico vehicular de la carretera E

x_F $\leq$ a La capacidad de trafico vehicular de la carretera F

x_G $\leq$ a La capacidad de trafico vehicular de la carretera G

x_H $\leq$ a La capacidad de trafico vehicular de la carretera H

x_I $\leq$ a La capacidad de trafico vehicular de la carretera I

x_J $\leq$ a La capacidad de trafico vehicular de la carretera J

x_K $\leq$ a La capacidad de trafico vehicular de la carretera K

Función Objetivo;

Maximizar $Z = x_{\mathbf{A}} + x_{\mathbf{B}} + x_{\mathbf{C}}$; Maximizar $Z = x_{\mathbf{H}} + x_{\mathbf{I}} + x_{\mathbf{J}}$

Sujeto a;

$x_{\mathbf{A}} = x_{\mathbf{F}} + x_{\mathbf{G}}$ nodo 2

$x_{\mathbf{F}} = x_{\mathbf{H}}$ nodo 7

$x_I = x_G + x_E + x_K$ nodo 6

$x_C = X_D$ nodo 4

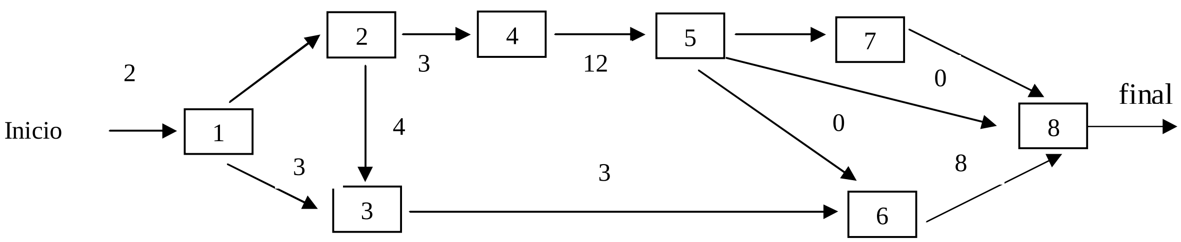
$x_B = X_E$ nodo 3

$x_D = x_K + x_J$ nodo 5

$x_H + x_I + x_J = x_A + x_B + x_C$ nodo 1 o 8

donde todas las x's sean $\geq$ O

PROBLEMA DE LA RUTA MÁS CORTA (CAMINO CRÍTICO)



Como el camino critico es el camino más largo en una red desde el nodo inicial hasta el nodo final, el objetivo del problema es el de Maximizar (encontrar el camino más largo).

Para poder resolver este problema como uno de Programación Lineal es necesario considerar que una unidad fluirá a través de la red y para mantener el equilibrio del flujo en la red se considera que el flujo que entra a un nodo es igual al flujo que sale del mismo. Así analizando el equilibrio en el nodo 5; lo que fluye hacia el nodo B debe de ser igual a lo que sale de el

$$x_{45} = x_{56} + x_{57} + x_{58}$$

Maximizar Z = $2x_{12} + 3x_{13} + 4x_{23} + 3x_{24} + 3x_{36} + 12x_{45} + 3x_{57} + 5x_{58} + 0x_{56} + 8x_{68} + 0x_{78}$

Sujeto a:

$x_{12} + x_{13}$	=	1	nodo	1
$x_{23} + x_{24}$	=	x_{12}	nodo	2
$x_{13} + x_{23}$	=	x_{36}	nodo	3
x_{24}	=	x_{45}	nodo	4
$x_{56} + x_{57} + x_{58}$	=	x_{45}	nodo	5
$x_{36} + x_{56}$	=	x_{68}	nodo	6
x_{57}	=	x_{78}	nodo	7
$x_{68} + x_{58} + x_{78}$	=	1	nodo	8

Donde las x_{ij} son 0 o 1

Lo que indicará que si la x_{ij} es 1, la actividad se encuentra en el camino critico y cero que la actividad no es critica.

PROBLEMA DE TRANSPORTE

Una cierta clase de problemas de Programación Lineal, conocida como problema de transporte, se da muy frecuentemente en aplicaciones prácticas. El problema general de transporte puede ser formulado como sigue; Un producto esta disponible en cantidades conocidas en cada uno de los m orígenes. Es requerido que ciertas cantidades de un producto sean transportadas a cada uno de los n destinos. El mínimo costo de transportar una unidad de cualquier origen a cualquier destino es conocido. Se desea determinar el programa de envíos que minimiza el costo total de transporte

EJEMPLO:
Una compañía fabrica un producto en tres plantas (A, B y C) de la cuales cuatro mercados son abastecidos (l, 2, 3 y 4). Los requerimientos de mercado, las capacidades de cada planta y los costos de transporte de cada planta a cada mercado se muestran a continuación;

	Mercado				
Planta	1	2	3	4	Capacidad
A	$9	$5	$4	$7	35
B	2	4	6	3	20
C	8	1	8	5	45
Requerimientos	30	40	10	20	100

Sea x_{ij} es la cantidad transportada de la Planta i al Mercado j. Se desea encontrar las $x_{ij} \geq 0$ las cuales satisfagan las 7 restricciones (3 de 1a capacidad de las plantas y 4 de las necesidades de los mercados).

Restricciones de capacidad de las plantas

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 35$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 20$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 45$$

de necesidades del mercado

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 30$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 40$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 10$$
$$x_{14} + X_{24} + X_{34} \geq 20$$
$$X\acute{}s \geq 0$$

Función Objetivo:

$$\text{Minimizar } Z = 9x_{11} + 6x_{12} + 4x_{13} + 7x_{14} + 2x_{21} + 4x_{22} + 6x_{23} + 3x_{24} + 8x_{31} + lx_{32} + 8x_{33} + 6x_{34}$$

PROBLEMA DE ASIGNACIÓN

una compartía de 1ímpieza desea determinar como asignar a sus empleados a diferentes centros de trabajo para realizar actividades de limpieza, de tal forma que la efectividad total del desempeño de sus actividades en centros de trabajo sean máximos.

A continuación se proporciona la matriz de efectividad del desempeñe de cada uno de los empleados si fueran asignados a los diferentes centros de trabajo.

	Centro de Trabajo				
EMPLEADO	1	2	3	4	5
1	20	14	6	10	22
2	16	8	22	20	10
3	8	6	24	40	12
4	4	16	22	6	24

Únicamente se pude asignar un empleado a un centro de trabajo y se debe de buscar la asignación que genere el mayor puntaje total en el desempeño.

X_{ij} se define como la posible asignación del empleado i al centro de trabajo j; donde $X_{ij} = 1$ si es asignado y $X_{ij} = 0$ si no es asignado.

Restricciones:

Para asegurar la asignación un empleado a un centro de trabajo tenemos;

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 1$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 1$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 1$$
$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} = 1$$

y de un centro de trabajo a un empleado

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1$$
$$x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} = 1$$

No negatividad de las x_{ij} para todo valor de i , j

Función Objetivo:

Minimizar

$$\begin{aligned} & 20x_{11} + 14x_{12} + 6x_{13} + 10x_{14} + 22x_{15} \\ & + 18x_{21} + 8x_{22} + 22x_{23} + 20x_{24} + 10x_{25} \\ & + 8x_{31} + 6x_{32} + 24x_{33} + 40x_{34} + 12x_{35} \\ & + 4x_{41} + 16x_{42} + 22x_{43} + 6x_{44} + 24x_{45} \end{aligned}$$