MÉTODO DE TRANSPORTE

Es un método de programación lineal para la asignación de artículos de un conjunto de origines a un conjunto de destinos de tal manera que se optimice la función objetivo.

Esta técnica es particularmente usada en organizaciones que producen el mismo producto en numerosas plantas y que envía sus productos a diferentes destinos (Centros de distribución, almacenes). También se aplica en distribución, análisis de localización de plantas y programación de la producción.

Se han desarrollado diferentes enfoques para resolver este problema de distribución, tales como: El método de la esquina noroeste, el método modificado de la esquina noroeste (celda mínima), método del trampolín (Cruce de arroyo, stepping stone), método de la distribución modificada (MODI), método de aproximación de Vogel y el método simplex.

Se cubrirán únicamente en estas notas los siguientes métodos:

a) Esquina Noroeste
b) Modificado de la esquina Noroeste.
c) Aproximación de Vogel.
d) Del trampolín (Stepping stone)

Para que un problema pueda ser solucionado por el método de transporte, este debe reunir tres condiciones:

1) La función objetivo y las restricciones deben de ser lineales.
2) Los artículos deben de ser uniformes e intercambiables, los coeficientes de todas las variables en la ecuación deben de ser 0 o 1.
3) La suma de las capacidades de las fuentes debe ser igual a la suma de los requerimientos de los destinos, si alguna desigualdad existe una variable de holgura deberá ser añadida.

FORMULACIÓN DEL PROBLEMA DE TRANSPORTE.

Una cierta clase de problemas de programación lineal, conocida como problema de transporte se da muy frecuentemente en aplicaciones prácticas. El problema general de transporte puede ser formulado como sigue:

Un producto está disponible en ciertas cantidades conocidas en cada uno de los m orígenes. Es requerido que ciertas cantidades de un producto sean transportadas a cada uno de los n destinos. El mínimo costo de transportar una unidad de cualquier origen a cualquier destino es conocido. Se desea determinar el programa de los envíos que minimiza el costo total de transporte.

Sea a_i la cantidad de producto disponible en el origen i y b_j la cantidad de producto requerida en el destino j. El costo de transportar una unidad de origen i al destino j será escrita como c_{ij}. Se asumirá que la cantidad disponible sea igual a la cantidad producida.

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}$$

Entonces x_{ij} es la cantidad transportada del origen i al destino j. Se desea encontrar las $x_{ij} \geq 0$, las cuales satisfagan las m + n restricciones.

$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$, donde $a_i > 0$, i = 1, 2,…m

$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$, donde $b_j > 0$, j = 1, 2,…n

Y que minimicen

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

El número de celdas asignadas, será igual a m + n + 1

Representación Tabular.

PLANTA					
1	X_{11}	X_{12}		X_{1n}	A_1
2	X_{21}	X_{22}		X_{2n}	A_2
m	X_{m1}	X_{m2}		X_{mn}	A_m
requerimientos	B_1	B_2		B_n	$\sum b_j = \sum a_i$

Todas la celdas no asignadas son iguales a cero, por ejemplo si tenemos una matriz del tamaño de 6x4 (m = 6 y n = 4), entonces el numero de celdas asignadas (valores de x_{ij} diferentes de cero) será m + n - 1 = 9, y las celdas no asignadas (con valores de x_{ij} = 0) serán 6(4)-9=15.

Métodos para obtener la primera Solución Inicial Básica

Como el saso de método Simples, el algoritmo de transporte consiste en empezar con una solución inicial y moverse de una solución básica a otra en un numero de finito de iteraciones.

En el método de transporte, sin embargo, la solución inicial no es solución factible cero, (Z = 0, todas las variables reales son iguales a cero) si no una de las posibles soluciones.

a) Método de la esquina Noroeste

La regla de la esquina noroeste muestra como obtener una rápida solución inicial. Esta no toma en consideración el costo de enviar una unidad de un centro de distribución a un centro de consumo.

- Paso 1.- Se obtiene realizando una asignación que no considera costos o beneficios.
  Inicia en la celda superior izquierda (esquina noroeste) de la tabla. De no existir alguna ir al Paso 3, de otra forma ir al Paso 2.
- Paso 2.- Asignar a esta celda la cantidad menor entre lo requerido y lo disponible (menor cantidad entre restricciones de esa fila y esa columna). Reste la cantidad asignada de lo disponible en la capacidad y lo requerido (restricción de la fila y la columna respectivamente), y elimine la fila o la columna que quede a nivel cero en su restricción, ir a Paso 1.
- Paso 3.- La solución inicial factible ha sido obtenida.

Ejemplo 1:

Una compañía fabrica un producto en tres plantas de las cuales 4 mercados son abastecidos (1, 2, 3 y 4). Los requerimientos del mercado, las capacidades de cada planta y los costos de transporte de cada planta a cada mercado se muestran a continuación;

Planta	Mercado				Capacidad
	1	2	3	4	
A	\$9	\$6	\$4	\$7	\$35
B	2	4	6	3	20
C	8	1	8	6	45
Requerimientos	30	40	10	20	100

Que estrategia de transportación minimizara los costos?

Solución:

Analizando la celda superior izquierda x_{a1}, encontramos que la restricción con el menor valor es el de la columna 1 (30), por lo que se asignan 30 unidades en esta celda.

Planta	Mercado				Capacidad	
	1	2	3	4		
A	30				35	5
B					20	
C					45	
Requerimientos	30	40	10	20	100	

0

Se analiza ahora la celda x_{a2}, se asignan 5 unidades

Planta	Mercado				Capacidad	
	1	2	3	4		
A	30	5			35	5 0
B					20	
C					45	
Requerimientos	30	40	10	20	100	

0 35

Se analiza ahora la celda x_{b2}, en la que se asignan 20 unidades.

Planta	Mercado				Capacidad	
	1	2	3	4		
A	30	5			35	5 0
B		20			20	0
C					45	
Requerimientos	30	40	10	20	100	

0 35

15

Se analiza ahora celda x_{c2}, en la que se asignan 15 unidades.

Planta	Mercado				Capacidad	
	1	2	3	4		
A	30	5			35	5 0
B		20			20	0
C		15			45	30
Requerimientos	30	40	10	20	100	

0 35

15

0

Se analiza ahora la celda x_{c3}, en la que se asignan 10 unidades.

Planta	Mercado				Capacidad	
	1	2	3	4		
A	30	5			35	5 0
B		20			20	0
C		15	10		45	30 15
Requerimientos	30	40	10	20	100	
	0	35 15 0	0			

Se analiza ahora la celda x_{c4} en la que se asignan 20 unidades.

Planta	Mercado				Capacidad	
	1	2	3	4		
A	30	5			35	5 0
B		20			20	0
C		15	10	20	45	30 15 0
Requerimientos	30	40	10	20	100	
	0	35 15 0	0	0		

Como ya n existen celdas por asignar, se ha alcanzado la solución inicial factible. Teniéndose la siguiente asignación;
X_{a1} = 30, x_{a2} =5, x_{b3} =20, x_{c2} = 15, x_{c3}=10, x_{c4}=20

Con un costo de transporte igual a ;
CT= 30 * 9 + 6 * 5 + 20 *4 + 15 * 1+ 10*8 + 20*6
CT= 270 + 30 +80 +15 + 80 + 120
CT= 595

B) MÉTODO MODIFICADO DE LA ESQUINA NOROESTE.

La solución inicial factible generada por el método de la esquina noroeste puede ser una solución a partir de la cual llegar a la solución optima requerida un proceso largo y tedioso con numerosas interacciones. Una modificación que acorta esto es el método modificado de la esquina noroeste. Este método requiere una reorientación de la esquina inicial con la más óptima asignación de tal forma que las cantidades disponibles y requeridas se encuentren satisfechas. Esta regla intenta tener una muy buena solución de tal manera que sean necesarias un menor número de cálculos interactivos. Esta regla no asegura la optimización en la primera solución factible, pero generalmente requiere un número limitado de interacciones. Esta aproximación tiende a colocar la situación más deseable en la esquina noroeste (aquella celda que tenga menor costo), la diferencia con el método de la esquina noroeste es precisamente el desarrollo de la primera tabla factible. El resto del procedimiento es idéntico.

Algoritmo de Método.

1) Empieza analizando las celdas no asignadas
2) Identifica la celda no asignada que tenga el menor costo C_{ij} en la matriz y asigne en ella tanto como sea posible debido a las restricciones con la fila y columna.
3) Reduzca lo asignado del correspondiente requerimiento y disponibilidad, eliminando la columna o fila correspondiente a estas que se haya reducido a cero.
4) Continúe con la fila o columna no eliminada y asigne en la celda que tenga menor costo. Si se ha terminado de asignar, ir al paso 2.
5) Repita el paso 2 hasta que lo requerido y lo disponible sea asignado.

Ejemplo 2:
Resuelva el problema del ejemplo 1 utilizando el método modificado de la esquina noroeste.
Examinando la tabla de costos de la ejemplo 1, se observa que las celdas c_2 tiene el costo mas bajo (C_{c2}=1), por esto esta celda será colocada en la esquina noroeste de la primera solución factible.

PLANTA	MERCADO				CAPACIDAD
	2				
C	1 40	6	8	8	45
	4	3	2	6	
	6	7	9	4	
Requerimientos	40				

El mercado 2 tiene una demande a de 40 unidades y la planta C puede producir 45 unidades. Para no violar las condiciones de equilibrio, 40 unidades son asignadas en la celda c_2(x_{c2}) las cuales satisfacen el mercado 2.
Pero la planta C aun tiene 5 unidades por asignar. Seleccionando el mercado con el mas bajo costo de entre los 3 mercados restantes (1,2 y 4). Asignar el mercado 4 al recibir las 5 unidades de la planta C.

PLANTA	MERCADO				CAPACIDAD
	2	4			
C	1 40	6 5	8	8	45
	4	3	2	6	
	6	7	9	4	
Requerimientos	40	20			

El mercado 4 aun necesita 15 unidades adicionales. De las plantas restantes (A y B), la planta B es colocada en la tabla y a que tiene el costo mas bajo de $ 3 en el mercado 4. Por lo consiguiente en a celda b4 (x_{b2}) se asignan 15 unidades, las cuales satisfacen el mercado 4.

PLANTA	MERCADO				CAPACIDAD
	2	4			
C	1 40	6 5	8	8	45
	4	3 15	2	6	20
	6	7	9	4	
Requerimientos	40	20			

La planta B aún tiene 5 unidades sin asignar, seleccionando el mercado con el costo mas bajo de entre de los dos mercados restantes (1, 3), como se muestra a continuación en el mercado 1 tiene un requerimiento de 25 unidades, considerando las 5 que toma de la planta B, a un tiene necesidad de 25 unidades las que pueden ser asignadas de la única planta restante (A).

PLANTA	MERCADO				CAPACIDAD
	2	4	1		
C	1 40	6 5	8	8	45
	4	3 15	2 5	6	20
	6	7	9	4	
Requerimientos	40	20	30		

Como se muestra, la planta A aún tiene 10 unidades no asignadas y estas son asignadas en el mercado restante (3). Con esto se ha obtenido la solución inicial factible.

PLANTA	MERCADO				CAPACIDAD
	2	4	1	3	
C	1 40	6 5	8	8	45
	4	3 15	2 5	6	20
	6	7	9 25	4 10	35
Requerimientos	40	20	30	10	100

Número de celdas asignadas = 3+4-1=6

Solución inicial Factible;

x_{c1}=40, x_{c2}=5, x_{b4}=15, x_{b1}=5,x_{a1}=25,x_{a3}=10

Con un costo de transporte

$$CT = 40*1 + 5*6 + 5*2 + 9*25 + 10*4 + 15*3$$
$$CT = \$\ 390$$

C) MÉTODO DE APROXIMACIÓN DE VOGEL.

Este método es razonablemente bueno para obtener una solución inicial básica factible, la cual puede ser óptima o requerir un número mínimo de interacciones para obtener la solución óptima.

El método es el siguiente:

Paso 1. Inicio con las celdas no asignadas.

Paso 2. Cálculo en cada fila y en cada columna la diferencia entre los dos costos más pequeños de las celdas.

Paso 3. De entre estas filas y columnas seleccione aquella que tenga la máxima diferencia.

Paso 4. Asigne tanto como sea posible en aquella celda que corresponda a la máxima diferencia y que tenga en su fila o columna el menor costo. (La máxima asignación posible es la cantidad menor entre lo disponible y lo requerido).

Paso 5. Reduzca la correspondiente cantidad asignada de la cantidad disponible y de la requerida, y elimine la fila o columna que se haya reducido a cero. Deténgase si no existen filas y comuna restantes. De forma contraria regresar al paso 1.

Ejemplo 3.
Tabla

PLANTA	MERCADO				CAPACIDAD		Dif1
	1	2	3	4			
A	9	6	4	7	35		2
B	2 20	4	6	3	20	0	1
C	8	1	8	6	45		5
Requerimientos	30	40	10	20			
	10						
Dif1	<u>6</u>	3	2	3			

La mayor de las diferencias corresponde a la columna 1 con valor igual a 6. Se asignan 20 unidades en la celda B_1 por tener el costo más bajo (2) de la columna 1. Se procede a obtener las siguientes diferencias, habiendo antes eliminado la fila B por haber enviado todas las unidades que tenía disponible.

PLANTA	MERCADO 1	2	3	4	CAPACIDAD		Dif1
A	$\boxed{9}$	$\boxed{6}$	$\boxed{4}$	$\boxed{7}$	35		2
B	$\boxed{2}$ 20	$\boxed{4}$	$\boxed{6}$	$\boxed{3}$	20	0	1
C	$\boxed{8}$	$\boxed{1}$ 40	$\boxed{8}$	$\boxed{6}$	45	5	5
Requerimientos	30	40	10	20			
	10	0					
Dif1	6	3	2	3			
Dif2	1	<u>5</u>	4	1			

La mayor de las diferencias corresponde a la columna 2 con valor igual a 5. Se asignan 40 unidades en la celda C_2 por tener el costo mas bajo (1) de la columna 2. Se procede a obtener las siguientes diferencias, habiendo antes eliminado la columna 2 por haber recibido todas las unidades que requería.

PLANTA	MERCADO 1	2	3	4	CAPACIDAD		Dif1	Dif2
A	$\boxed{9}$	$\boxed{6}$	$\boxed{4}$ 10	$\boxed{7}$	35	25	2	3
B	$\boxed{2}$ 20	$\boxed{4}$	$\boxed{6}$	$\boxed{3}$	20	0	1	
C	$\boxed{8}$	$\boxed{1}$ 40	$\boxed{8}$	$\boxed{6}$	45	5	5	2
Requerimientos	30	40	10	20				
	10	0	0					
Dif1	6	3	2	3				
Dif2	1	5	<u>4</u>	1				

La mayor de las diferencias corresponde a la columna 3 con valor igual a 4. Se asignan 10 unidades en la celda A_3 por tener el costo más bajo (4) de la columna 3. Se procede a obtener las siguientes diferencias, habiendo antes eliminado la columna 3 por haber recibido todas las unidades que requería.

PLANTA	MERCADO 1	2	3	4	CAPACIDAD			Dif1	Dif2	Dif3
A	$\boxed{9}$	$\boxed{6}$	$\boxed{4}$ 10	$\boxed{7}$ 20	35 →	25 →	5	2	3	2
B	$\boxed{2}$ 20	$\boxed{4}$	$\boxed{6}$	$\boxed{3}$	20 →	0 →		1		
C	$\boxed{8}$	$\boxed{1}$ 40	$\boxed{8}$	$\boxed{6}$	45 →	5		5	2	2
Requerimientos	30	40	10	20						
	↓ 10	↓ 0	↓ 0	↓ 0						
Dif1	6	3	2	3						
Dif2	1	5	<u>4</u>	1						

La mayor de las diferencias corresponde a la fila A con valor igual a 2. Se asignan 20 unidades en la celda A_4 por tener el costo más bajo (7) de la fila B. Se procede a obtener las siguientes diferencias, habiendo antes eliminado la columna 4 por haber recibido todas las unidades que requería.

Como la planta A y la planta C tiene aún 5 unidades disponibles cada una y dado que el mercado 1 está aún insatisfecho en su requerimiento en 10 unidades, se le asignan 5 unidades de la planta A y 5 unidades de la planta C. Por lo que la solución inicial factible es como sigue:

$X_{A1} = 5,\ X_{AB} = 10,\ X_{A4} = 20,\ X_{B1} = 20,\ X_{C1} = 5,\ X_{C2} = 40$

Con un costo de transporte igual a :

$$CT = 5*9 + 4*10 + 7*20 + 2*20 + 8*5 + 1*40$$
$$CT = \$345$$

D) PROCEDIMIENTO DE OPTIMIZACIÓN.

Partiendo de una solución inicial factible (Vogel, Esquina Noroeste, etc.) es necesario probar la optimización de la asignación evaluando todas las celdas no asignadas (vacías) y determinando la conveniencia de asignar en ellas. En la evaluación de las celdas vacías para un posible mejoramiento, una ruta cerrada (ciclo) es seleccionada. La ruta tiene movimientos horizontales y verticales, considerando que las celdas asignadas y no asignadas pueden ser brincadas en el movimiento para localizar una celda adecuada. Con la excepción de la celda que está siendo evaluada, el resto de las celdas en la ruta deben tener una asignación. Cuando nos movimientos alrededor de la ruta cerrada, cambios de dirección en ángulo recto (movimientos verticales y horizontales) son realizados en cada celda que toque la ruta, que resulta con la adición de una unidad y la resta de una unidad de cada fila, y la columna incluida en la ruta (con asignación alternada de signos positivos y negativos a los costos de las celdas en la ruta).

La adición y la resta asegura que las restricciones de la unidad de capacidad y la unidad de requerimientos no serán violadas.

Para evaluar la celda vacía se realiza la sumatoria de los costos de cada una de las celdas en la ruta.

Si alguna de estas evaluaciones arrojará un signo negativo (para un problema de minimización), entonces se deberá asignar en aquella celda con la evaluación más negativa. Esto indicará que una reducción en el costo total puede lograrse transfiriendo tantas unidades como sea posible a esa celda.

El número de unidades posibles a ser transferido será igual a la mínima cantidad que se encuentra asignada en las celdas de la ruta con costo negativo. Al realizarse esta transferencia debe asegurarse que las restricciones de la capacidad y de requerimientos no sean violadas (esto se hace agregando las unidades encontradas a asignar en las celdas con signo positivo y restando estas unidades de las celdas con signo negativo).

Si la evolución de todas las celdas vacías arrojan valores positivos, entonces se dice que la asignación es óptima.

Ejemplos de rutas:

9 30	- 6 5	+ 4	7	35
2	4 20	6	3	20
8	+ 1 15	- 8 10	6 20	45
30	30	10	20	100

Evaluación en la celda 1, 3 = 4 – 8 + 1 – 6 = - 9

TABLA

- 9 30	+ 6 20	4	7	3	50
2	- 4 30	+ 6 10	3	8	40
5	1	- 5 10	+ 6 50	7	60
5	8	9	- 2 10	5 21	31
30	50	20	60	21	181

Evaluación en la celda 4, 1 = 5 – 9 + 6 – 4 + 6 – 5 + 6 – 2 = + 3

TABLA

9 30	6 20	4	7	3	50
2	- 4 30	6 10	+ 3	8	40
5 10	+ 1 40	5	6	- 7 10	60
5	8	9	- 2 30	+ 5 1	31
30	50	20	60	21	181

Evaluación en la celda 2, 4 = 3 – 4 + 1 – 7 + 5 – 2 = - 4

Ejemplo 4:

Partiendo de la solución inicial obtenida en el ejemplo 1 obtenga la solución óptima utilizando este procedimiento de optimización:

TABLA

PLANTA	MERCADO				CAPACIDAD
	1	2	3	4	
A	9 30	- 6 5	+ 4	7	35
B	2	4 20	6	3	20
C	8	+ 1 15	- 8 10	6 20	45
Requerimientos	30	30	10	20	100

EVALUACIÓN.

X_{A3} = 4 -8 +1 -6 = -9 ← Se debe asignar la celda A_3 por tener valor más negativo

X_{A4} = 7 -6 +1 -6 = -4

X_{B1} = 2 -9 +6 -4 = -5

X_{C1} = 8 -9 +6 -1 =+4

X_{B3} = 6 -8 +1 -4 = -5

X_{B4} = 3 -6 +1 -4 = -6

Costo total = CT = 30*9 +5*6 +20*4 +15*1 +10*8 +20*6

CT = $595

Le deben asignar 5 unidades en la celda A_3 ya que en la ruta las celdas con signo negativo la asignación menor es de 5 unidades.

TABLA

PLANTA	MERCADO 1	2	3	4	CAPACIDAD
A	- $\boxed{9}$ 30	$\boxed{6}$	+ $\boxed{4}$ 5	$\boxed{7}$	35
B	+ $\boxed{2}$	- $\boxed{4}$ 20	$\boxed{6}$	$\boxed{3}$	20
C	$\boxed{8}$	+ $\boxed{1}$ 20	- $\boxed{8}$ 5	$\boxed{6}$ 20	45
Requerimientos	30	30	10	20	100

EVALUCIÓN.

$X_{A2} = 6 -4 +8 -1 = 9$

$X_{A4} = 7 -6 +8 -4 = 5$

$X_{B1} = 2 -9 +4 -8 +11 -4 = -14$ ←Asignar en la celda B_1 por tener el valor más negativo

$X_{B2} = 6 -8 +1 -4 = -5$

$X_{B4} = 3 -6 +1 -4 = -6$

$X_{C1} = 8 -9 +4 -8 = -5$

Le deben asignar 5 unidades en la celda B_1 ya que en la ruta las celdas con signo negativo la asignación menor es de 5 unidades.

TABLA.

PLANTA	MERCADO 1	2	3	4	CAPACIDAD
A	- $\boxed{9}$ 25	$\boxed{6}$	$\boxed{4}$ 10	+ $\boxed{7}$	35
B	+ $\boxed{2}$ 5	- $\boxed{4}$ 15	$\boxed{6}$	$\boxed{3}$	20
C	$\boxed{8}$	+ $\boxed{1}$ 25	$\boxed{8}$	- $\boxed{6}$ 20	45
Requerimientos	30	30	10	20	100

EVALUCIÓN.

$X_{A2} = 6 - 4 +2 -9 = -5$

$X_{A4} = 7 -6 +1 -4 +2 -9 = -9$ ←Asignar en la celda A_4 por ser la más negativa.

$X_{B3} = 6 -2 +9 -4 = 9$

$X_{B4} = 3 -6 +1 -4 =-6$

$X_{C1} = 8 -2 +4 -1 = 9$

$X_{C3} = -1 +4 -2 +9 -4 = 14$

Le deben asignar 15 unidades en la celda B_2 ya que en la ruta las celdas con signo negativo la asignación menor es de 15 unidades.

TABLA.

PLANTA	MERCADO 1	2	3	4	CAPACIDAD
A	- 9 / 10	6	4 / 10	+ 7 / 15	35
B	2 / 20	4	6	3	20
C	+ 8	1 / 40	8	- 6 / 5	45
Requerimientos	30	30	10	20	100

EVALUACIÓN

X_{A2} = 6 -7 +6 -1 = 4

X_{B2} = -2 +9 -7 +6 -1 = 9

X_{B3} = 6 -2 +9 -4 = 9

X_{B4} = 3 -2 +9 -7 =3

X_{C1} = 8 -9 +7 -6 = 0

X_{C2} = -4 +7 -6 = 5

Como todas las evoluciones son positivas la asignación es óptima, con el resultado siguiente:

CELDA	ASIGNACIÓN	COSTO
A1	10	10*9
A3	10	10*4
A4	15	15*7
B1	20	20*2
C2	40	40*1
C4	5	5*6
	COSTO TOTAL =	$345

LOCALIZACIONES ARTIFICIALES (CELDAS ARTIFICIALES)

El Método de Transporte requiere que la suma de las capacidades iguales a la de los requerimientos. Si la suma de las capacidades no iguala a la suma de los requerimientos (producción no iguala a la demanda) una localización (celda) artificial puede ser creada para lograr la igualdad. La localización artificial tendrá asignación de cero en los valores de la función objetivo y será eliminada si la solución final indica alguna asignación en la localización artificial.

Si lo requerido excede a la capacidad una localización artificial puede representar una planta imaginaria. Si la capacidad excede a lo requerido una localización artificial puede representar un mercado imaginario. La localización artificial es similar a la variable de holgura en el Método Simples.

Ejemplo:

Una compañía fabrica un producto en 3 plantas (A, B, Y C) y envía el producto a 3 almacenes (X, Y, Y Z). El beneficio incremental por unidad para las diferentes plantas con referencia a las combinaciones de los almacenes es mostrado en la siguiente tabla.

TABLA

PLANTA	MERCADO X	Y	Z	CAPACIDAD
A	20	7	10	140
B	5	0	8	50
C	6	10	9	60
Requerimientos	100	50	30	180<>250

Que programa de envíos maximizará la ganancia?

Como los requerimientos son menores que la capacidad (180<250) y por lo tanto no son iguales, un almacén artificial (H) debe ser agregado, los beneficios en esta celda serán cero y cualquier asignación en su celda será ignorada en la solución final.

TABLA

PLANTA	MERCADO X	Y	Z	H	CAPACIDAD
A	20	7	10	0	140
B	5	0	8	0	50
C	6	10	9	0	60
Requerimientos	100	50	30	70	250

Partiendo de la tabla proporcionada se aplica algún método de los ya cubiertos y se optimiza utilizando el método del trampolín (Stepping Stone).

La tabla óptima de este problema es la siguiente:

TABLA

PLANTA	MERCADO X	Y	Z	H	CAPACIDAD
A	20 100	7	10 30	0 10	140
B	5	0	8	0 50	50
C	6	10 50	9	0 10	60
Requerimientos	100	50	30	70	250

El beneficio máximo es = 20*100 + 30*10+50*10 = 2800

Por lo que se enviaran 100 unidades a la celda AX, 30 unidades a la celda AZ, 50 unidades a la celda CY y cero en el resto de las celdas.

DEGENERACIÓN

Si mas de m + n – 1 celdas son asignadas, habrá mas de un ciclo (camino cerrado) para el análisis de las celdas en busca de la optimalidad.

Todos los posibles caminos deben ser evaluados para determinar la optimalidad de las asignadas realizadas. Si menos de m + n – 1 celdas son asignadas, el problema se denomina **Degenerado** y no todas las celdas vacías (no asignadas) tendrá un camino cerrado (ciclo). La condición de degeneración puede ocurrir en la solución inicial o puede iniciarse cuando dos celdas con igual asignación salen la solución (es decir una de las dos celdas queda a nivel cero), cuando una transferencia de unidades se realiza a una celda de menor costo. Existen varias formas de manejar la degeneración. Esta dificultad puede ser eliminada utilizando la letra E, que representa una asignación infinitesimal asignándola en aquella o aquellas celdas que causaron la degeneración (celda o celdas que pasan a nivel cero) y con ello se completan las m + n – 1 celdas asignadas.

Una regla sencilla es la siguiente:

Si una celda asignada dada que pasa a nivel cero no tiene otras asignaciones en la fila o columna a las cuales pertenece, asigne la pequeña cantidad E en cualquier celda no asignada en esa fila o en esa columna. Si la condición anterior no existe, asigne una pequeña cantidad E, en cualquier celda no asignada que permita completar la evaluación de las celdas.

Problema de maximización

Cuando se trate de maximizar utilidad, ganancias, producción, efectividad, etc. los c_{ij} ser negativos (multiplicarlos por -1) y el problema se tratara como uno de minimización utilizando de forma normal los métodos cubiertos. La única consideración es la que cuando se haya obtenido la asignación optima los c_{ij} deben ser nuevamente positivos (tomar sus valores originales).

Otra alternativa será la de determinar el mayor c_{ij} y obtener la diferencia entre este valor y cada uno de los c_{ij} en la tabla. El problema se resuelve de la forma normal utilizando los métodos cubiertos y una vez obtenida la asignación optima los c_{ij} deberán tomar sus valores originales.

METODO DE ASIGNACION

El método de asignación es una forma de Programación Lineal, que asigna eficientemente personas a tareas. Es un método iterativo que garantiza encontrar un programa óptimo de asignación sin tener que considerar todas las posibles alternativas. Esta técnica ha estado siendo usada para asignar órdenes a máquinas, personas a proyectos, vendedores a territorios, vehículos a sectores, etc.

El método de asignación conocido como EL METODO DE HUNGARO requiere una asignación de uno a uno entre personas y tareas, resultando una matriz cuadrada donde el número de personas (filas) es igual al número de tareas (columnas). El procedimiento de solución no permite la posibilidad de asignar una de las personas a más de una tarea. Si el número de las personas no es igual al número de las tareas, un agente o tarea de holgura deberá ser creada con valor cero, para obtener una matriz cuadrada y esas variables (ficticias) de holgura asignadas son ignoradas en la solución óptima.

Los números en la matriz serán los valores asociados con cada asignación. Esencialmente está técnica minimiza los costos de oportunidad de perdida en una manera similar como el máximo arrepentimiento es de minimizado en toma de decisiones bajo incertidumbre.

La formulación de este problema de asignación como uno de programación lineal es la siguiente.

Optimizar: $Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij}$

Sujeto a; $\sum_{i=1}^{n} {}_{ij} = 1$; para i = 1, 2, 3, ... n

$\sum_{i=1}^{n} X_{ij} = 1$; para j = 1, 2, 3, ... n

* Todos los problemas de asignación pueden ser formulados y resueltos como problemas de programación lineal por el método simples. Sin embargo el método de asignación es computacionalmente más eficiente.

ALGORITMO DEL MÉTODO DE ASIGNACIÓN.

Establezca la primera matriz

Si # de columnas ◊ # filas establecer asignaciones de holgura para obtener igualdad de filas y columnas.

Determine si es un problema de Maximización o Minimización

Problema de Maximización

Transformar esta matriz de matriz de ganancias en una matriz de costos.
Determinando la entrada mayor y obteniendo la diferencia con cada una de las entradas de la matriz.

Problema de Minimización

1. Generar un cero al menos por fila y columna;
   a) Para cada columna reste la entrada más pequeña de las otras entradas en la columna.
   b) Para cada fila, resta la entrada más pequeña de las otras entradas de la fila.
2. Cruce con el menor número de líneas las filas y las columnas que contengan ceros. Inicie por la fila o columna que tenga la mayor cantidad de ceros.

Si es el # de filas o # de columnas Si es igual al # de líneas

1. Analice cada entrada en la matriz que tenga un cero, y cuente el número de ceros que existen en esa fila y columna.
2. Aquella posición cuya entrada es cero y tenga la menor cantidad de ceros por fila y por columna (si existe empate, rómpalo arbitrariamente) es elegida para ser asignada.
3. Elimine esta fila y columna y regrese al paso 1.
4. El proceso termina cuando ya no existen entradas por analizar.

Si el # de filas o # de columnas No es igual al # de líneas.

1. Reste la menor entrada de la matriz no cubierta por las líneas de todas las entradas no cubiertas por las líneas.
2. Sume la anterior menor entrada a todas las entradas que se encuentre en las intersecciones de las líneas.
3. Todas las entradas restantes de la matriz permanecen sin cambio.

Para determinar la asignación óptima, ponga los valores originales en las celdas que fueron elegidas para ser asignadas y sume estos valores.

Ejemplo:

Una compañía de limpieza desea determinar como asignar a sus empleados a diferentes centros de trabajo para realizar actividades de limpieza, de tal forma que la efectividad total del desempeño de sus actividades en centro de trabajo sean máximos.

A continuación se proporciona la matriz de efectividad del desempeño de cada uno de los empleados si fueran asignados a los diferentes centros de trabajo.

TABLA

	CENTRO DE TRABAJO				
EMPLEADO	1	2	3	4	5
1	20	14	6	10	22
2	16	8	22	20	10
3	8	6	24	40	12
4	4	16	22	6	24

Cuatro empleados serán asignados a 5 centros de trabajo. El nivel máximo posible de desempeño es de 40.

Debido a que la matriz no es cuadrada, un empleado artificial será añadido.

TABLA.

	CENTRO DE TRABAJO				
EMPLEADO	1	2	3	4	5
1	20	14	6	10	22
2	16	8	22	20	10
3	8	6	24	40	12
4	20	22	2	8	6
5	0	0	0	0	0

El objetivo es el que de maximizar el desempeño total en los centros de trabajo, debido a que es un problema de maximización, reste de todas las entradas de las celdas en la matriz la máxima entrada de celda (esta operación convierte la matriz de ganancias en una matriz de costos.) La máxima entrada de celda es 40, la matriz modificada se muestra a continuación:

	CENTRO DE TRABAJO				
EMPLEADO	1	2	3	4	5
1	20	26	34	30	18
2	24	32	18	20	30
3	32	34	16	0	28
4	20	18	38	32	34
5	40	40	40	40	40

Los costos de oportunidad para cada columna son obtenidos restando la entrada de costo más baja en cada columna de los otros costos en la misma columna. El resultado se muestra a continuación:

TABLA.

EMPLEADO	CENTRO DE TRABAJO				
	1	2	3	4	5
1	0	8	18	30	0
2	4	14	2	20	12
3	12	16	0	0	10
4	0	0	22	32	16
5	20	22	24	40	22

Los costos de oportunidad para cada fila son obtenidos restando la entrada de costo más baja en cada fila de los otros costos en la misma fila. Todo esto es con el fin de generar a menos un cero por cada fila y por cada columna. El resultado se muestra a continuación:

TABLA

EMPLEADO	CENTRO DE TRABAJO				
	1	2	3	4	5
1	0	8	18	30	0
2	2	12	0	18	10
3	12	16	0	0	10
4	0	0	22	32	16
5	0	2	4	20	2

Debido a que existen 5 filas y estas pueden cubrir todas las celdas con entradas cero (con el menor número de líneas), una asignación óptima se ha logrado).

El paso final requiere que las filas y columnas con únicamente un cero son exploradas para determinar las asignaciones. Las filas 2 y 5 tiene celda única con entrada cero, y las columnas 2, 4 y 5 tienen celda única con entrada cero, por lo que la persona 2 será asignada al centro de trabajo 3, la persona 5 ficticia será asignada al centro de trabajo 1 (lo que indica que ninguna persona es asignada al centro de trabajo 1), la persona 4 será asignada al centro de trabajo 2, la persona 3 será asignada al centro de trabajo 4 y la persona 1 será asignada al centro de trabajo 1. La asignación óptima es la siguiente:

Persona	Centro de Trabajo	Eficiencia
1	5	22
2	3	22
3	4	40
4	2	22
		106